



## Capacità sismica di archi in muratura

Giuseppe Brandonisio, Antonello De Luca

*Dipartimento di Strutture per l'Ingegneria e l'Architettura, Università degli Studi di Napoli Federico II*

*Keywords: Archi contraffortati in muratura; Regole di progettazione; Analisi Limite; Meccanismi di collasso; Capacità sismica*

### ABSTRACT

Il comportamento degli archi in muratura è governato dall'equilibrio, non dalla resistenza. Pertanto, le regole di progettazione che si sono utilizzate in passato erano rivolte a fissare le dimensioni, ed i rapporti relativi, che definiscono geometricamente l'arco.

Infatti, i criteri di proporzionamento derivanti dagli studi svolti nei secoli XV-XVIII da De La Hire, De Belidor, Alberti, Mascheroni etc., così come le indicazioni progettuali suggerite nei manuali del XIX e XX secolo, si riconducono a semplici regole geometriche finalizzate a ottenere archi sicuri sotto i carichi verticali. La validità di queste regole, che si basano principalmente sulla teoria delle proporzioni, è confermata dal fatto che ancora oggi sono presenti molte strutture antiche ad arco, che pertanto hanno superato la prova del tempo.

Nella presente nota viene affrontato il problema della vulnerabilità sismica degli archi circolari contraffortati.

A tal fine, viene inizialmente presentata una panoramica delle antiche regole di progettazione al fine di stabilire l'intervallo di variabilità dei parametri geometrici che definiscono lo spessore dell'arco e le dimensioni dei contrafforti.

Successivamente, nell'ambito dell'analisi limite delle strutture murarie alla Heyman, vengono presentati e discussi i risultati dell'analisi sismica condotta su numerosi archi contraffortati circolari caratterizzati da differenti geometrie.

I risultati dell'analisi numeriche mostrano che, in presenza delle azioni orizzontali, i meccanismi di collasso attivabili variano rispetto a quelli classicamente studiati considerando i soli carichi verticali.

In particolare, si osserva che gli archi a tutto sesto diventano generalmente più vulnerabili degli archi ribassati a causa dell'attivazione di differenti meccanismi di collasso (ad "arco" per i semicircolari e "misto" per gli archi depressi), ma anche perché gli archi a tutto sesto, a causa dei contenuti valori della spinta alle imposte, sono generalmente poggiati su contrafforti più snelli, e quindi sismicamente più vulnerabili, di quelli a sostegno degli archi ribassati.

### 1 INTRODUZIONE

Gli archi contraffortati, gli archi trionfali nelle chiese, come pure i colonnati alla base degli edifici o nei cortili interni, sono strutture tipiche che caratterizzano edifici murari ordinari e monumentali, che sono molto diffusi nei centri storici della penisola italiana.

Tali strutture ad arco sono particolarmente vulnerabili alle azioni sismiche, come già osservato dagli autori in Brandonisio et al. (2103 e 2015) e (Lucibello et al. 2013), dove sono stati dettagliatamente descritti i danni tipicamente sperimentati dalle strutture murarie ad arco durante i passati terremoti.

Nell'accezione comune, per arco in muratura si intende una struttura curva capace di portare in sicurezza i carichi verticali.

Secondo la definizione fornita da Rondelet, un arco è una struttura in grado di portare carichi verticali scomponendoli in forze inclinate, denominate spinte dell'arco, che vengono assorbite dai sottostanti muri di contrafforte (Rondelet 1802). Di conseguenza, una struttura in muratura può essere considerata un arco quando è formata da pezzi denominati conci, di forma idonea ed adeguatamente disposti, che sono in equilibrio sotto i carichi verticali e la spinta di conci adiacenti, a prescindere la forma ad arco. Ciò comporta che la forma curva non è una condizione essenziale per considerare una struttura come un arco. Infatti, un architrave di

conci compressi lavora ad arco anche se ha la forma di una piattabanda (Breymann 1885).

Tali strutture sono state costruite nei secoli passati per soddisfare le condizioni di equilibrio degli elementi costitutivi (i conci dell'arco ed i contrafforti) soggetti ai carichi verticali (derivanti dalla forza di gravità) ed alle conseguenti forze orizzontali (spinta dell'arco).

Il processo di progettazione degli archi era governato dalla geometria, dando luogo alla ben nota teoria delle proporzioni. In questo contesto, nei secoli passati sono state sviluppate diverse regole di progettazione per stabilire la geometria più appropriata dell'arco e le minime dimensioni del contrafforte per contrastare la spinta dell'arco alle imposte evitando così suo ribaltamento grazie all'effetto stabilizzante del suo peso proprio.

Occorre anche osservare che in presenza delle azioni sismiche il comportamento meccanico dell'arco contraffortato cambia. Infatti, alle azioni da carichi verticali (ed in particolare alle spinta "statica") occorre sovrapporre la spinta "sismica" indotta dalle forze inerziali, che cambia sostanzialmente la curva delle pressioni e conseguentemente variano i possibili meccanismi di collasso che si possono attivare in caso di sisma.

Alla luce delle considerazioni precedenti, con la presente nota si vuole indagare sulla capacità sismica degli archi contraffortati progettati in base alle regole dell'arte per resistere ai soli carichi verticali.

In particolare, verranno analizzati archi in muratura a forma circolare caratterizzati da diverse geometrie ottenute variando parametricamente i parametri geometrici caratterizzanti la struttura muraria.

A tal fine, una panoramica sullo stato dell'arte delle regole utilizzate nei passati per il progetto e la costruzione degli archi circolari in muratura e dei contrafforte di supporto vengono preliminarmente presentate e discusse. Tale studio è indispensabile, a parere degli autori, per individuare le dimensioni tipicamente adottate nel passato per la particolare tipologia in esame.

L'influenza della geometria dell'arco contraffortato sulla capacità orizzontale viene valutata utilizzando una procedura numerica proposta dagli autori in un lavoro precedente (Brandonisio et al. 2017a), che si basa sull'applicazione dell'analisi limite alla Heyman combinato con la tecnica di ottimizzazione basata sulla programmazione non lineare.

L'affidabilità della procedura numerica è stata validata in (Brandonisio et al. 2017b e 2017c) attraverso il confronto con la reale risposta dei

due archi della chiesa di S. Maria delle Grazie in Navelli (AQ) al sisma abruzzese del 2009. Il confronto ha dimostrato un buon accordo in termini sia di meccanismo di rottura sia di posizione delle cerniere all'interno degli archi esaminati, a conferma l'affidabilità della metodologia utilizzata nel presente articolo.

I risultati numerici qui presentati e discussi consentono di comprendere l'influenza della geometria sulla capacità laterale degli archi circolari contraffortati sia in termini di meccanismo di collasso attivati che di massima forza orizzontale ammissibile.

## 2 L'ARCO CONTRAFFORTATO IN MURATURA

Dal punto di vista geometrico l'arco contraffortato può essere completamente definito dai seguenti parametri (si veda Figura 1):  $R$ =raggio interno,  $L$ =luce libera,  $B$ =larghezza dei piedritti,  $D$ =larghezza globale,  $t$ =spessore dell'arco,  $2\omega$ =angolo al centro (o alle imposte),  $h_o$ =altezza del centro,  $h$ =altezza dei piedritti (o contrafforti).

Ovviamente, se  $h=0$  l'arco contraffortato si riconduce al arco semplice.

La Figura 1 mostra anche le condizioni di carico considerate nel presente lavoro, che consistono in forze verticali ( $W$ ) che rappresentano i carichi gravitazionali e in forze orizzontali ( $\lambda \cdot W$ ) proporzionali ai carichi verticali attraverso moltiplicatore  $\lambda$  del carico orizzontale.

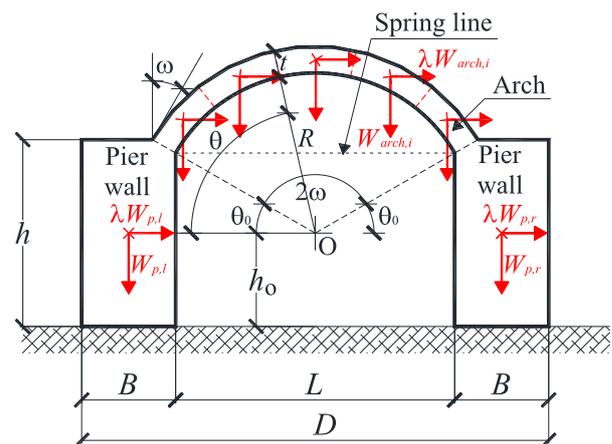


Figura 1. Geometria e carichi agenti su un arco contraffortato.

La geometria dell'arco contraffortato può essere parametrizzata adottando adeguati rapporti geometrici (di seguito denominati rapporti fondamentali). In questo lavoro verrà utilizzato come parametro geometrico di

adimensionalizzazione il raggio interno dell'arco, pertanto, si utilizzeranno i seguenti rapporti adimensionali: (i) spessore dell'arco  $t/R$ ; (ii) larghezza del contrafforte  $B/R$ ; (iii) altezza del contrafforte  $h/R$ .

Come già detto in precedenza, le dimensioni geometriche degli archi in muratura era stabilite in passato sulla scorta dell'esperienza maturata dagli antichi costruttori, ovvero seguendo la teoria delle proporzioni basata sul presupposto che la sicurezza degli archi soggetti ai carichi gravitazionali dipendesse unicamente dalla geometria.

Conseguentemente, diverse regole empiriche di dimensionamento sono state usate per stabilire: (i) la forma dell'arco più appropriata (piatto, triangolare, circolare, segmentale, gotico, siriano, ecc.); (ii) lo spessore minimo dell'arco ( $t_{min}$ ) necessario ad accomodare la curva delle pressioni e (iii) le dimensioni minime dei contrafforti necessarie per resistere alla spinta dell'arco alle imposte grazie all'effetto stabilizzante del proprio peso.

Con riferimento all'arco di forma circolare, nei due paragrafi che seguono si analizzano le regole empiriche di progettazione dell'arco (§3) e dei piedritti (§4), rispettivamente, che sono ampiamente trattati in (Milani 1923), (Benvenuto 1981), (Di Pasquale 1996), (Corradi 1998), (Kurrer 2018) e (Brandonisio et al. 2019a e 2019b).

### 3 REGOLE DI PROGETTO DEGLI ARCHI CIRCOLARI

Gli archi in muratura sono stati progettati e costruiti in passato attraverso regole empiriche, generalmente basate sulla teoria delle proporzioni o su considerazioni geometriche derivanti da condizioni di equilibrio fra i carichi agenti.

Come scrisse Benvenuto in (Benvenuto 1981), l'elenco dei parametri geometrici da fissare nella progettazione degli archi in muratura è riportata in (Gautier 1716) e si possono ricondurre a: (i) la forma dell'arco (circolare, gotico, ribassato, segmentale, ecc.), (ii) lo spessore dell'arco in chiave  $t$  e (iii) la variabilità dello spessore lungo lo sviluppo dell'arco.

Con riferimento agli archi circolari, il parametro progettuale da calcolare è lo spessore minimo dell'arco in chiave, che solitamente veniva stabilito in passato proporzionalmente al raggio  $R$  ovvero alla luce  $L$  mediante regole

empiriche proposte da molti studiosi nel corso dei secoli e riportati in trattati sull'arte del costruire, manuali di progettazione, libri tecnici, articoli scientifici.

Nel presente articolo le regole di progettazione dello spessore minimo dell'arco sono state classificate in tre generazioni a seconda del periodo in cui queste regole furono formulate.

#### 3.1 Prima generazione di regole di progetto: dalla costruzione geometrica di Leonardo da Vinci alle limitazioni empiriche in termini di $t/R$

Una delle più antiche regole di progettazione per lo spessore dell'arco circolare ad arco è stata suggerita da Leonardo Da Vinci. Questa regola è basata su una semplice costruzione geometrica che consiste nel tracciare la corda che collega, sull'estradosso dell'arco, la sezione in chiave con quella alle imposte. Tale regola geometrica fu descritta da Leonardo con le seguenti parole: “l'arco non si romperà se la corda dell'archi di fuori non tocherà l'arco di dentro”.

È chiaro come Leonardo sembra intuire in largo anticipo il concetto di curva delle pressioni e di meccanismo di collasso dell'arco, anche se, ovviamente, tali concetti non vengono formulati con rigore scientifico moderno.

Le regole di progettazione sviluppate nei secoli XVI÷XVII si basano sulla teoria delle proporzioni. Infatti, lo spessore minimo ( $t_{min}$ ) necessario per la stabilità degli archi sotto carichi verticali veniva stabilita come frazione del raggio dell'arco.

Tra le tante regole empiriche che furono suggerite da diversi studiosi, occorre ricordare quelle proposte da Alberti (1410) (Alberti 1755), Serlio (1510) (Serlio 1584), Palladio (Palladio, 1550), Fabbri (Fabbri, 1669) e Couplet (Couplet 1732) (citato anche in (Corradi 1998), (Proske et al. 2009), (Huerta 2018) e (Kurrer 2018)). Queste regole empiriche legano il minimo spessore  $t_{min}$  degli archi a tutto sesto il raggio interno  $R$  attraverso le seguenti relazioni semplificate:

$$t/R_{min, Alberti} = 1/7.5 = 0.133 \quad (1)$$

$$t/R_{min, Serlio} = 1/8.5 = 0.118 \quad (2)$$

$$t/R_{min, Palladio} = 1/6 = 0.167 \quad (3)$$

$$t/R_{min, Fabbri} = 0.414 \quad (4)$$

$$t/R_{min, Couplet} = 0.106 \quad (5)$$

### 3.2 Seconda generazione di regole di progetto: spessore minimo fornito in termini di $t/L$

Nel 1862 Rankine ancora suggeriva una regola di progetto empirica basata sul calcolo dello spessore minimo dell'arco in funzione del raggio interno, attraverso la seguente formula di progetto (Rankine 1862):

$$t_{min, Rankine} = 0.191 \cdot R^{0.5} \quad (6)$$

nella quale  $R$  deve essere espressa in metri.

Successivamente, dopo la nascita della Scienza delle Costruzioni con il libro di Navier (Navier 1833), le regole di progettazione empiriche suggerite nei secoli XIX e XIX legavano lo spessore minimo dell'arco  $t_{min}$  alla luce libera  $L$ , che poi è il principale parametro architettonico che si fissa apriori nella progettazione delle strutture ad archi, anch'essa non necessariamente di forma circolare.

Poiché nel caso di archi circolari la luce libera  $L$  è correlata sia al raggio interno  $R$  e che all'angolo al centro  $2\omega$  attraverso la seguente equazione (si veda Figura 1):

$$L = 2 \cdot R \cdot \sin \omega \quad (7)$$

la seconda generazione di regole empiriche può essere anche espressa in termini di  $R$  e  $2\omega$ .

Tra le tante regole di progetto, si possono citare quelle suggerite da Dupuit (1870), Gautier (1716), Perronet (1748), Dejardin, Lesguillier, L'Eveillé, Ingegneri tedeschi e russi, Roy e Michon, rispettivamente:

$$t_{min, Dupuit} = 0.20 \cdot L^{0.5} \quad (8)$$

$$t_{min, Gautier} = 0.32 + L/15 \quad (9)$$

$$t_{min, Perronet} = 0.325 + 0.035 \cdot L \quad (10)$$

$$t_{min, Dejardin} = 0.30 + 0.025 \cdot L \quad (11)$$

$$t_{min, Lesguillier} = 0.10 + 0.2 \cdot L^{0.5} \quad (12)$$

$$t_{min, L'Eveillé} = 0.33 + 0.33 \cdot L \quad (13)$$

$$t_{min, German \& Russian Engineers} = 0.43 + 0.05 \cdot L \quad (14)$$

$$t_{min, Roy} = 0.30 + 0.04 \cdot L \quad (15)$$

$$t_{min, Michon} = 0.40 + 0.04 \cdot L \quad (16)$$

### 3.3 Terza generazione di regole di progetto: riscoperta delle limitazioni in termini di $t/R$

Negli ultimi due secoli, il dimensionamento dello spessore arco ha riscoperto la semplicità delle regole empiriche della prima generazione in termini di  $t/R$ , come testimoniano le recenti regole di progetto per gli archi circolari suggerite

da Monasterio (1805-1810) (citato da (Albuerne et al. 2010)), Milankovitch (1904, 1907) e Heyman (1966), Ochsendorf (2002) e Makris & Alexakis (2013), tra gli altri:

$$t/R_{min, Monasterio} = 0.111 \div 0.118 \quad (17)$$

$$t/R_{min, Milankovitch} = 0.114 \quad (18)$$

$$t/R_{min, Heyman} = 0.112 \quad (19)$$

$$t/R_{min, Ochsendorf} = 0.114 \quad (20)$$

$$t/R_{min, Alexakis et al.} = 0.116 \quad (21)$$

Dalle Eq. (17)÷(21) si può osservare che le regole di progetto di terza generazione forniscono valori dello spessore minimo dell'arco molto vicini tra loro, a testimonianza di una avvenuta stabilità nel fissare lo spessore minimo necessario alla stabilità dell'arco circolare sotto i carichi verticali.

## 4 REGOLE DI PROGETTO DEI PIEDRITTI RETTANGOLARI

Anche per la progettazione dei contrafforti che sorreggono gli archi sono state suggerite molte regole empiriche, come evidenziato in (Benvenuto 1981), (Heyman 1982), (Giuffrè 1986), (Di Pasquale 1996), (Corradi 1998), (Proske et al. 2009), (Como 2013) e (Kurrer 2018).

Nei seguenti sotto-paragrafi verrà fornita una breve panoramica di queste regole di progetto del contrafforte che verranno anch'esse classificate in tre generazioni seguendo un ordine cronologico.

### 4.1 Prima generazione di regole di progetto: le antiche regole di Alberti ed il metodo geometrico di Derand

La prima indicazione sulla progettazione del contrafforte risale al XV secolo, quando da Leon Battista Alberti suggerì i seguenti limiti inferiori e superiori sullo spessore  $B$  del piedritto (Alberti 1755):

$$B/L_{inf, Alberti} = 1/6 \quad (22)$$

$$B/L_{sup, Alberti} = 1/4 \quad (23)$$

Si può notare come le limitazioni dell'Alberti non dipendono né dall'altezza  $h$  del contrafforte né dall'angolo al centro  $2\omega$ .

Nel 1643 Francois Derand (Derand 1643) suggerisce una procedura grafica utilizzata dagli antichi costruttori medievali per stabilire la larghezza minima del contrafforte. Il metodo

consiste nel dividere l'intradosso dell'arco in tre archi uguali TS, SQ e QP e nel trovare il punto di Q\* sulla congiungente del segmento PQ ad una distanza tale che  $PQ^* = PQ$ . Secondo tale regola grafica, la larghezza minima del piedritto B è data dalla proiezione orizzontale di PQ\*.

Difatti, con questo metodo grafico, Derand intuisce in maniera primordiale il comportamento meccanico dell'arco contraffortato sotto carichi verticali. Infatti, il metodo grafico di Derand può essere considerato come un primo tentativo per capire il comportamento reale meccanico degli archi in muratura contraffortati, anche se non viene utilizzata alcuna condizione di equilibrio. Pertanto, con la regola di Derand sia lo spessore dell'arco  $t$  che l'altezza del piedritto  $h$  non influenzano la minima larghezza del contrafforte, ovvero:

$$B_{min, Derand} = B(R, \omega) \quad (24)$$

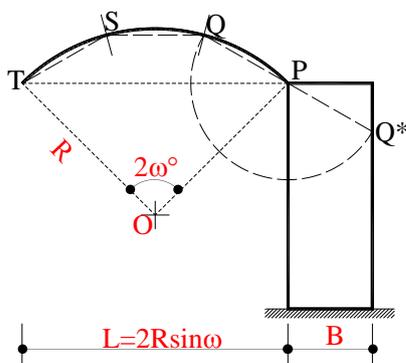


Figura 2. Metodo grafico di Derand (1643).

#### 4.2 Seconda generazione di regole di progetto: i metodi basati sull'equilibrio

Durante i secoli XVII XVIII il dimensionamento di contrafforti robusti a sostegno di archi veniva effettuata utilizzando metodi basati sull'equilibrio delle forze agenti sul piedritto.

Come riportato anche in (Heyman 1982), a partire dal 1695 De La Hire studiò il meccanismo di collasso delle strutture ad arco utilizzando solamente i principi della statica (De La Hire 1729). Nel 1712, a quanto pare per la prima volta, La Hire osservò che se i piedritti a sostegno di un arco erano troppo deboli per assorbire la spinta esercitata dall'arco soprastante, quest'ultimo collassa a seguito della formazione delle fessure che si manifestano all'estradosso dell'arco nelle sezioni ai reni ed in chiave all'intradosso. Pertanto, La Hire intuisce l'approccio con cui studiare la sicurezza statica dell'arco

contraffortato, ovvero imponendo l'equilibrio tra le forze agenti al collasso, anche se non fornisce alcuna regola per individuare le posizioni critiche delle cerniere nel meccanismo di rottura ipotizzato.

Successivamente, Belidor (Belidor 1729) ha studiato un meccanismo di rottura di quattro-cerniere che, diversamente da La Hire, è stato caratterizzato di fessure posizionate a 45° dalla imposte dell'arco (Figura 3). Belidor, inoltre, trascura l'attrito sulla superficie di contatto, pertanto, lo scorrimento del cuneo centrale dell'arco provoca una spinta laterale  $T$  sul contrafforte che tende a ribaltare sul punto A. Come evidenziato in Figura 3, Belidor ipotizza la spinta  $T$  applicata nel in asse all'arco (ovvero a  $t/2$ ) con direzione perpendicolare alla lesione, ovvero a 45 sull'orizzontale. In tali ipotesi, la spinta  $T$  è bilanciata dal peso del piedritto ( $W_{pier}$ ) e della restante parte dell'arco ( $W_{arch}$ ).

Di conseguenza, dalla condizione di equilibrio al ribaltamento intorno al polo A, si può determinare la larghezza minima del contrafforte secondo Belidor:

$$T \cdot d_T \leq W_{arch}(t) \cdot d_{Warch} + W_{pier}(h, B) \cdot d_{Wpier}(B) \Rightarrow B_{min, Belidor} = B(t, R, h) \quad (25)$$

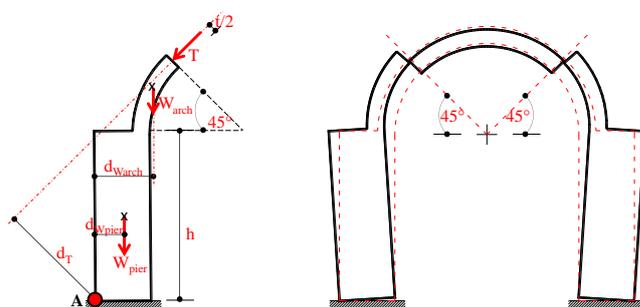


Figura 3. Il meccanismo di collasso di Belidor (1729).

Nel 1785 Mascheroni suggerì un criterio di progettazione del contrafforte basato su condizioni di equilibrio delle parti rigide formate nella struttura al collasso (Mascheroni 1785). Il meccanismo di collasso a cinque-cerniere analizzato da Mascheroni è illustrato in Figura 4, con le cerniere A ed E poste alla base dei piedritti, la cerniera C in chiave all'estradosso e le cerniere B e D disposte simmetricamente all'intradosso dell'arco. A differenza di Belidor, col metodo di Mascheroni la posizione delle cerniere B e D si stabilisce utilizzando una procedura iterativa che consiste nel cambiare gli angoli  $\theta_B$  e  $\theta_D$  fino a trovare la posizione più critica delle cerniere ( $\bar{\theta}_B$  e  $\bar{\theta}_D = \bar{\theta}_B + 90^\circ$ ), in corrispondenza della massima larghezza  $B$  del piedritto necessaria ad

assicurarne la stabilità contro il ribaltamento mediante la seguente condizione di equilibrio:

$$T \cdot d_T(\bar{\theta}_B) \leq W_{arch,c}(\bar{\theta}_B) \cdot d_{W_{arch,c}}(\bar{\theta}_B) + W_{arch,l}(\bar{\theta}_B) \cdot d_{W_{arch,l}}(\bar{\theta}_B) + W_{pier}(h, B) \cdot d_{W_{pier}}(B) \Rightarrow B_{min, Mascheroni} = B(t, R, h, \bar{\theta}_B) \quad (26)$$

Dalla struttura delle equazioni (25) e (26) si può notare che la larghezza minima del piedritto fornita sia da Belidor sia da Mascheroni dipende anche dall'altezza  $h$  del piedritto.

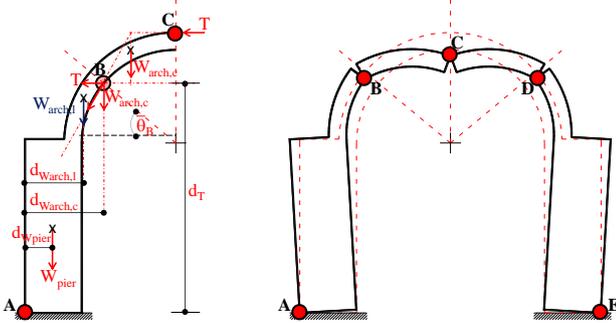


Figura 4. Il meccanismo di collasso di Mascheroni (1785).

#### 4.3 Terza generazione di regole di progetto: le indicazioni progettuali dei manuali del 19° e 20° secolo

Nei secoli XIX e XX, in conseguenza dei risultati degli studi condotti nei secoli precedenti, le regole di progetto legate ai metodi basati sull'equilibrio sono stati sintetizzati in regole geometriche semplificate che sono riportate in manuali e libri tecnici pubblicati nell'ultimo secolo. Queste regole di progettazione consentono di stabilire la larghezza minima del contrafforte  $B_{min}$  in funzione della luce libera  $L$  e l'altezza del contrafforte  $h$ . Ad esempio, la prima edizione del manuale dell'ingegnere civile (Colombo 1877) suggerisce le seguenti indicazioni progettuali:

per archi a tutto sesto con  $h > 3m$

$$B_{min, Colombo} = 1/4 \cdot L + h/6 \quad (27)$$

per archi depressi con  $h > 3m$

$$B_{min, Colombo} = 2/7 \cdot L + h/6 \quad (28)$$

Indicazioni progettuali simili sono suggerite anche nel testo di Anselmo Ciappi (Ciappi 1935):

per archi a tutto sesto con  $h > 3m$

$$B_{min, Ciappi} = 2/11 \cdot L + h/6 \quad (29)$$

per archi depressi con  $h > 3m$

$$B_{min, Ciappi} = 2/7 \cdot L + h/6 \quad (30)$$

## 5 ANALISI LIMITE DEGLI ARCHI CONTRAFFORTATI IN MURATURA SOTTOAZIONI ORIZZONTALI

### 5.1 Concetti base per l'applicazione dell'analisi limite agli archi contraffortati in muratura e meccanismi di collasso

L'applicazione dell'analisi limite mediante il teorema cinematico richiede l'identificazione e l'analisi di tutti i meccanismi di collasso che possono essere ritenuti significativi per la struttura in esame. Questi meccanismi possono essere: (i) definiti sulla base del danneggiamento osservato in strutture simili in seguito ai passati terremoti; (ii) suggeriti dal preesistente quadro fessurativo presente sull'elemento murario in esame.

Sulla base delle precedenti considerazioni, l'analisi sismica degli archi-portali in muratura attraverso la L.A. viene qui applicata adottando le note ipotesi di Heyman (Heyman 1966), ovvero: (i) la muratura non ha alcuna resistenza a trazione; (ii) la muratura ha una resistenza a compressione infinita; (iii) assenza di scorrimento fra i blocchi.

Infatti, come lo stesso Heyman asserì, con queste ipotesi sul comportamento del materiale, e con le classiche ipotesi che le strutture restino nell'ambito di piccoli spostamenti, le idee della teoria plastica sviluppate per telai in acciaio possono essere "tradotte" ed applicate anche agli archi in muratura.

In merito all'identificazione dei meccanismi di collasso a quattro cerniere che possono attivarsi in un arco contraffortato sotto azioni sismiche, in questo lavoro si assume che le cerniere si possano attivare nelle seguenti sedi: base dei piedritti; attacco piedritto-arco; nell'arco. Pertanto, i seguenti tre meccanismi di rottura possono essere presi in considerazione:

a) il meccanismo ad arco (Figura 5a), nel seguito denominato anche meccanismo I, con formazione di tutte e quattro le cerniere A, B, C, e D nello sviluppo dell'arco, le cui posizioni possono individuarsi attraverso gli angoli  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\theta_C$  e  $\theta_D$ , misurati rispetto alla linea d'imposta;

b) il meccanismo globale (Figura 5b), indicato anche come meccanismo II, caratterizzato dalla formazione delle cerniere A e D alla base dei piedritti e delle due cerniere B e C all'interno dell'arco definite dagli angoli  $\theta_B$  e  $\theta_C$ , rispettivamente;

c) il meccanismo misto (Figura 5c), appreso chiamato anche meccanismo III, contraddistinto dalla formazione della cerniera D alla base di un piedritto e tre cerniere A, B e C all'interno dello sviluppo dell'arco, le cui posizioni sono individuate dagli angoli  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  e  $\theta_C$  rispettivamente.

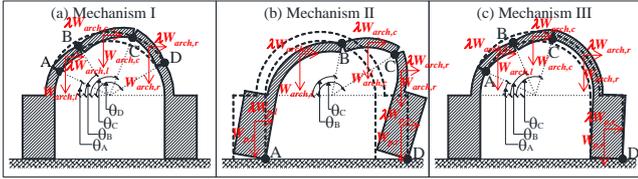


Figura 5. Meccanismi di collasso considerati: (a) meccanismo ad arco (Mecc. I); (b) meccanismo globale (Mecc. II); (c) meccanismo misto (Mecc. III).

La possibilità di attivazione del meccanismo ad arco in luogo del meccanismo globale o del meccanismo misto dipende dalla proporzione relativa arco/piedritti, nonché dipende dalle distribuzioni di carico. Infatti, in presenza di un arco sottile (ad esempio caratterizzato da un rapporto  $t/R=0.1-0.15$ ), o quando i carichi verticali prevalgono su quelli orizzontali (ad esempio in area a bassa sismicità), si attiverà con molta probabilità il meccanismo ad arco. Al contrario, in presenza di contrafforti snelli (ovvero quando  $h/B>3$ ) e di un arco spesso (ad esempio quando  $t/R>0.4$ ), ovvero in prevalenza di azioni orizzontali, il meccanismo che presumibilmente si attiverà sarà quello globale. Infine, quando l'arco contraffortato è geometricamente ben proporzionato nel rispetto delle regole dell'arte del costruire, cioè quando l'arco è caratterizzato da un rapporto tra spessore e raggio  $t/R=0.2-0.3$  mentre il piedritto ha proporzioni tali che  $h/B=2-3$ , il meccanismo misto è quello che più probabilmente si attiverà.

## 5.2 Calcolo del moltiplicatore di collasso $\lambda$ dei carichi orizzontali

Con riferimento alla prescelta classe dei tre meccanismi di collasso di Figura 5, il coefficiente di amplificazione dei carichi orizzontali  $\lambda$  può essere assunto come il minimo tra i tre moltiplicatori  $\lambda^j$  calcolati utilizzando il teorema cinematico dell'analisi limite, che porta a scrivere la seguente equazione mediante l'applicazione del principio dei lavori virtuali:

$$\lambda^j = \frac{\left[ W_{pier,l} \cdot v_{pier,r} + \sum_{i=l,r,l} (W_{arch,i} \cdot v_{arch,i}) + W_{pier,r} \cdot v_{pier,r} \right]}{\left[ W_{pier,l} \cdot u_{pier,r} + \sum_{i=l,r,l} (W_{arch,i} \cdot u_{arch,i}) + W_{pier,r} \cdot u_{pier,r} \right]} \quad (31)$$

dove:

–  $\lambda^j$  è il coefficiente di amplificazione dei carichi orizzontali, dato dal rapporto tra il carico orizzontale che attiva il meccanismo  $j$  ( $j=I, II, III$ ) ed il carico verticale totale:

$$W_{tot} = W_{pier,l} + W_{arch} + W_{pier,r};$$

–  $W_{pier,l}$  e  $W_{pier,r}$  sono il peso proprio del piedritto sinistro e destro, rispettivamente;

–  $W_{arch,i}$  ( $i=l, c, r$ ) è il peso proprio delle tre parti rigide dell'arco ( $l$ =sinistra,  $c$ =centrale,  $r$ =destra) coinvolte nel meccanismo di collasso, che vengono individuate dagli angoli  $\theta_k$  ( $k=A, B, C, D$ ) che definiscono la posizione delle cerniere nell'arco (quindi, il peso dell'intero arco-portale vale:  $W_{arch} = W_{arch,l} + W_{arch,c} + W_{arch,r}$ );

–  $v_{pier,i}$  e  $u_{pier,i}$  ( $i=l, r$ ) sono le componenti verticali e orizzontali degli spostamenti del baricentro dei piedritti ( $l$ =sinistra,  $r$ =destra);

–  $v_{arch,i}$  e  $u_{arch,i}$  ( $i=l, c, r$ ) sono le componenti verticali e orizzontali degli spostamenti del baricentro delle tre parti dell'arco ( $l$ =sinistra,  $c$ =centrale,  $r$ =destra) coinvolte nel meccanismo di collasso.

Le componenti verticali e orizzontali delle forze e degli spostamenti da considerare nell'applicazione dell'analisi limite attraverso l'Eq. (31) sono indicati in Figura 6 insieme alle catene cinematiche ed ai centri di rotazione che caratterizzano i cinematicismi I, II e III, rispettivamente.

Le espressioni per calcolare i pesi e le componenti degli spostamenti dei corpi rigidi coinvolti nelle tre catene cinematiche di Figura 6 sono riportate in Brandonisio et al. 2017a per il caso degli archi a tutto sesto.

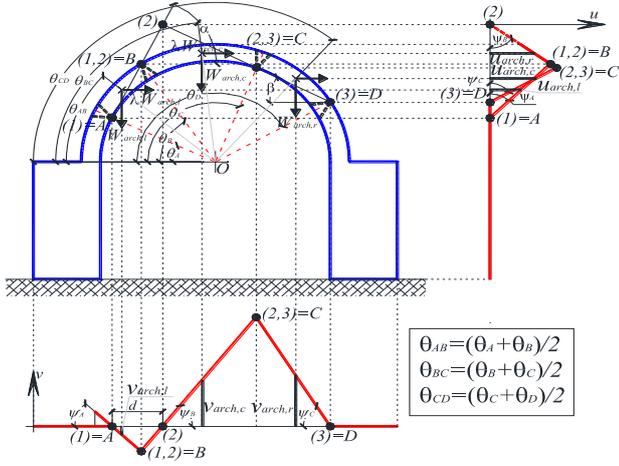
Come già detto, il coefficiente amplificativo dei carichi orizzontali  $\lambda$  è definito come il valore minimo fra i tre moltiplicatori  $\lambda^I, \lambda^{II}, \lambda^{III}$  calcolati in base alla Eq. (31). Una volta ricavato il moltiplicatore dei carichi orizzontali  $\lambda$  è possibile tracciare la curva delle pressioni che passa fra le cerniere A, B, C, D, al fine di controllare l'ammissibilità della soluzione individuata.

Occorre osservare che le variabili coinvolte nella Eq. (31) per la valutazione del coefficiente di amplificazione del carico orizzontale  $\lambda^j$  sono legate da relazioni non lineari con le posizioni delle cerniere. Infatti, i pesi  $W_{arch,l}, W_{arch,c}, W_{arch,r}$  sono funzione degli angoli  $\theta_k$  che individuano le cerniere nell'arco, mentre le componenti degli spostamenti dei blocchi rigidi costituenti l'arco variano con le funzioni  $\sin\theta_k$  e  $\cos\theta_k$ ; dunque l'Eq. (31) può riscriversi come:

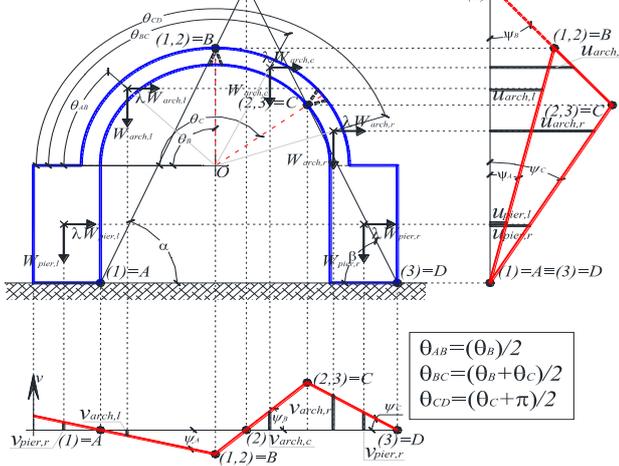
$$\lambda^j = \frac{W_{pier,j} \cdot v_{pier,r} + \sum_{i=1,r,j} [W_{arch,i}(\vartheta_k) \cdot v_{arch,i}(\sin(\vartheta_k), \cos(\vartheta_k))] + W_{pier,r} \cdot v_{pier,r}}{W_{pier,j} \cdot u_{pier,r} + \sum_{i=1,r,j} [W_{arch,i}(\vartheta_k) \cdot u_{arch,i}(\sin(\vartheta_k), \cos(\vartheta_k))] + W_{pier,r} \cdot u_{pier,r}} \quad (32)$$

dove  $j = I, II, III$  e  $k = A, B, C, D$ .

(a) Mecc. I



(b) Mecc. II



(c) Mecc. III

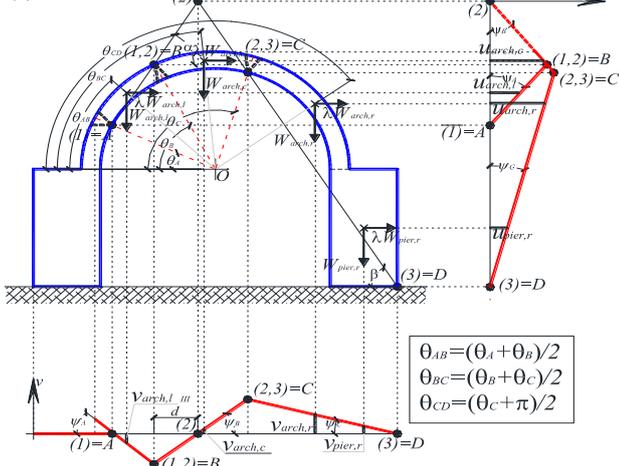


Figura 6. Catene cinematiche con indicazione delle forze e degli spostamenti: (a) meccanismo I; (b) meccanismo II; (c) meccanismo III.

Pertanto, per ogni meccanismo di collasso, le posizioni delle cerniere devono essere variate al fine di trovare i valori di  $\theta_A, \theta_B, \theta_C$  e  $\theta_D$  che minimizzano il corrispondente moltiplicatore di collasso  $\lambda^j$  ( $j = I, II, III$ ). Per questo scopo, una

procedura automatica basata su NLP viene descritta nel seguente sotto paragrafo.

### 5.3 Procedura automatica di Programmazione Non-Lineare (NLP)

Come suggerito in Gilbert (2007), l'effettivo meccanismo di rottura di un arco in muratura ed il corrispondente moltiplicatore di collasso  $\lambda$  possono essere individuati utilizzando le tecniche di ottimizzazione della programmazione lineare (LP) o non-lineare (NLP), che sono processi di soluzione di sistemi di equazioni e disequazioni su un insieme di variabili reali incognite, con una funzione obiettivo da massimizzare o minimizzare.

A tal fine, l'effettivo moltiplicatore dei carichi orizzontali  $\lambda$  viene qui valutato attraverso il metodo NLP, in quanto sia le condizioni di vincoli, sia la funzione obiettivo da minimizzare, sono funzioni lisce non-lineari delle variabili di decisione. Infatti, con riferimento al  $j$ -esimo meccanismo di rottura di Figura 6 ( $j = I, II, III$ ), il valore minimo del moltiplicatore di collasso:

$$\lambda^j = \lambda^j(\theta_A, \sin\theta_A, \cos\theta_A, \theta_B, \sin\theta_B, \cos\theta_B, \theta_C, \sin\theta_C, \cos\theta_C, \theta_D, \sin\theta_D, \cos\theta_D) \quad (33)$$

ovvero la soluzione ottimale della NLP, possono trovarsi utilizzando la posizione di cerniere  $\theta_k$  ( $k = A, B, C, D$ ) come variabili di decisione del problema di ottimizzazione. Poiché le cerniere possono svilupparsi in qualsiasi sezione dell'arco (vale a dire per qualsiasi valore degli angoli  $\theta_A, \theta_B, \theta_C$  e  $\theta_D$  che definiscono la posizione delle cerniere nei meccanismi I, II e III di Figura 6), infinite configurazioni delle cerniere dovrebbero essere prese in considerazione per ogni meccanismo, cui corrispondono infiniti moltiplicatori  $\lambda^j$ ; il moltiplicatore di collasso che attiva il meccanismo  $j^{mo}$  è ovviamente il minimo:

$$\lambda_{min}^j = \min(\lambda^j) \quad (j = I, II, III) \quad (34)$$

Pertanto, il problema di ottimizzazione non-lineare applicata ai meccanismi di tre collasso di Figura 6 consente di ottenere la posizione delle cerniere nell'arco, attraverso il valore degli angoli  $\theta_A, \theta_B, \theta_C$  e  $\theta_D$  (variabili non negative incognite) che minimizzano la funzione obiettivo  $\lambda^j = \lambda^j(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D)$  data dall'Eq. (33) ( $j = I, II, III$ ). L'effettivo moltiplicatore del carico orizzontale  $\lambda$  sarà il valore minimo dei moltiplicatori di collasso  $\lambda_{min}^j$  calcolati per i tre meccanismi di Figura 5, cioè:

$$\lambda = \min \begin{cases} \lambda'_{\min} = \min(\lambda') \\ \lambda''_{\min} = \min(\lambda'') \\ \lambda'''_{\min} = \min(\lambda''') \end{cases} \quad (35)$$

Per quanto riguarda le condizioni di vincolo che definiscono il problema di ottimizzazione non-lineare, la Figura 7 mostra le condizioni al contorno che le variabili incognite  $\theta_k$  ( $k=A, B, C, D$ ) devono soddisfare per ciascuno dei tre meccanismi di rottura considerati. In particolare, in tutti i casi, la prima cerniera nell'arco viene ipotizzata avere un'inclinazione minima di  $\theta_0 = \pi/2 - \omega$  rispetto alla linea d'imposta ( $\theta_{A,\min} = \theta_0$  per i meccanismi I e III;  $\theta_{B,\min} = \theta_0$  per il meccanismo II), mentre l'ultima cerniere è stata ipotizzata con un'inclinazione massima di  $\pi - \theta_0$  rispetto alla linea d'imposta (vale a dire:  $\theta_{D,\min} = \pi - \theta_0$  per il meccanismo I;  $\theta_{C,\min} = \pi - \theta_0$  per i meccanismi II e III).

In definitiva, le condizioni di vincolo che gli angoli  $\theta_k$  ( $k=A, B, C, D$ ) devono soddisfare per il meccanismo di rottura I sono (Figura 7a):

$$\begin{cases} \theta_A \geq \theta_{A,\min} = \theta_0 = \pi/2 - \omega \\ \theta_A < \theta_B \leq \theta_{B,\max} = \pi/2 \\ \theta_C > \theta_{C,\min} = \pi/2 \\ \theta_C < \theta_D \leq \theta_{D,\max} = \pi - \theta_0 \end{cases} \quad (36)$$

Nel caso del meccanismo II, le condizioni al contorno per gli angoli  $\theta_B$  e  $\theta_C$  possono scriversi come (Figura 7b):

$$\begin{cases} \theta_{B,\min} = \theta_0 = \pi/2 - \omega \leq \theta_B \leq \theta_{B,\max} = \pi/2 \\ \theta_B < \theta_C \leq \theta_{C,\max} = \pi - \theta_0 \end{cases} \quad (37)$$

Infine, il problema di ottimizzazione per il meccanismo di collasso III può essere definito dalle seguenti condizioni vincolari (Figura 7c):

$$\begin{cases} \theta_A \geq \theta_{A,\min} = \theta_0 = \pi/2 - \omega \\ \theta_A < \theta_B \leq \theta_{B,\max} = \pi/2 \\ \theta_{C,\min} = \pi/2 < \theta_C \leq \theta_{C,\max} = \pi - \theta_0 \end{cases} \quad (38)$$

Nel caso dei meccanismi I e III, occorre soddisfare anche le seguenti condizioni di vincolo aggiuntive al fine di escludere soluzioni negative per la funzione obiettivo  $\lambda^j$ :

$$d^j > 0 \quad (j=I, III) \quad (39)$$

$$v_{arch,c} > 0 \quad (\text{solo per il meccanismo III}) \quad (40)$$

dove  $d^I$  e  $d^{III}$  sono le distanze orizzontali mostrate nelle catene cinematiche delle Figure 6a e 6c,

rispettivamente, e  $v_{arch,c}$  è lo spostamento verticale del baricentro della parte centrale dell'arco coinvolto nel meccanismo di collasso III (si veda Figura 6c). Le espressioni analitiche per la valutazione di  $d^I$ ,  $d^{III}$  e  $v_{arch,c}$  sono riportate in (Brandonisio et al. 2017a).

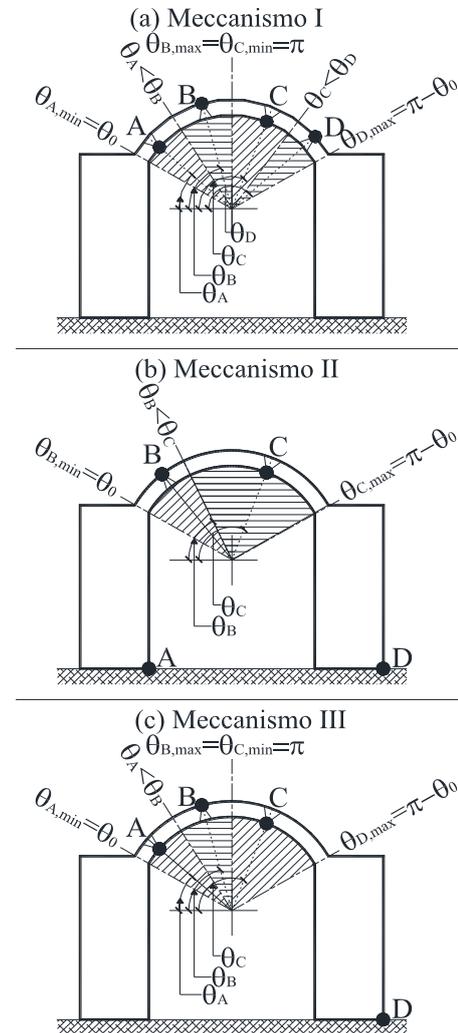


Figura 7. Vincoli per le variabili incognite  $\theta_i$  ( $i=A, B, C, D$ ) per il meccanismo I (a), meccanismo II (b) e meccanismo III (c).

L'utilizzo di una procedura automatica implementata in software dedicati alla risoluzione delle tecniche di ottimizzazione può essere molto comoda per la ricerca del valore minimo della funzione obiettivo  $\lambda^j = \lambda^j(\theta_k, \sin\theta_k, \cos\theta_k)$  e dei corrispondenti angoli  $\theta_k$  che definiscono la posizione di cerniere ( $k=A, B, C, D$ ). In particolare, i risultati numerici forniti in questo documento sono stati calcolati utilizzando il solutore automatico implementato in Excel, che consente di risolvere problemi di ottimizzazione non-lineare utilizzando il ben noto algoritmo del gradiente ridotto (GRG=Generalized Reduced Gradient) proposto da (Lasdon et al. 1978) per problemi non lineari in cui le funzioni siano sufficientemente regolari. Il metodo GRG, infatti,

risolve i problemi di ottimizzazione non lineari risolvendo una sequenza di problemi ridotti, che vengono risolti con il metodo del gradiente che consiste nel trovare il valore massimo o minimo di una superficie seguendo il gradiente, verso l'alto o verso il basso. In altre parole, il codice GRG può essere visto come un'estensione al problema non-lineare del metodo del Simplex, che seleziona una base di soluzioni fattibili, determina una direzione di ricerca ed esegue una ricerca lineare in ogni iterazione, risolvendo sistemi di equazioni non lineari ad ogni passo per conservare la fattibilità della soluzione.

## 6 ANALISI PARAMETRICA

### 6.1 Descrizione dei 320 casi di studio esaminati

La procedura numerica illustrata nel paragrafo precedente per valutare la capacità sismica degli archi in muratura contraffortati viene qui parametricamente applicata a 320 casi di studio ottenuti variando i principali parametri geometrici che ne definiscono la configurazione.

In dettaglio, gli archi contraffortati analizzati sono stati ottenuti variando i seguenti parametri geometrici:

- angolo al centro  $2\omega$ , secondo quattro diverse configurazioni dell'arco:  $2\omega=90^\circ$  -  $2\omega=120^\circ$  -  $2\omega=150^\circ$  -  $2\omega=180^\circ$ ;
- spessore dell'arco  $t$ , variabile nell'intervallo:  $t/R=0.10$  -  $t/R=0.20$  -  $t/R=0.30$  -  $t/R=0.40$ ;
- altezza del contrafforte  $h$ , variabile tra uno e quattro volte il raggio  $R$  dell'arco:  $h/R=1.00$  -  $h/R=2.00$  -  $h/R=3.00$  -  $h/R=4.00$ ;
- spessore del contrafforte  $B$ , variabile tra il 38% e il 125% del raggio  $R$ , vale a dire:  $B/R=0.38$  -  $B/R=0.50$  -  $B/R=0.75$  -  $B/R=1.00$  -  $B/R=1.25$ .

Come sottolineato in (Brandonisio et al. 2019a), la variabilità dei rapporti fondamentali utilizzati nell'analisi parametrica permette di coprire la geometria degli archi in muratura costruiti in passato secondo le regole dell'arte esaminate nella prima parte del presente lavoro.

La combinazione dei valori scelti per i rapporti fondamentali consente di ottenere 320 diverse geometrie di archi contraffortati, le cui analisi sismiche permettono di avere una corretta comprensione dell'influenza della geometria sulla

capacità orizzontale degli archi contraffortati e sui possibili meccanismi di collasso.

### 6.2 Meccanismi di collasso attivati

La Figura 8 mostra un quadro sinottico dei meccanismi di collasso attivati nei 320 casi di studio esaminati. L'analisi di questa figura permette di comprendere quando un meccanismo di rottura prevale su uno altro a seconda della geometria dell'arco contraffortato.

	B/R	$2\omega=90^\circ$				$2\omega=120^\circ$				$2\omega=150^\circ$				$2\omega=180^\circ$						
		h/R				h/R				h/R				h/R						
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4			
t/R=0.1 (Archi sottili)	0.38	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	Nessuna capacità orizzontale			
	0.5	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III				
	0.75	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I	I	I	I				
	1	III	III	III	III	I	I	III	III	I	I	I	I	I	I	I				
	1.25	III	III	III	III	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I				
t/R=0.2 (Archi medi)	0.38	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I
	0.5	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I
	0.75	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I
	1	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	III	III	III	III	I	I	I	I
	1.25	III	III	III	III	I	I	III	III	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
t/R=0.3 (Archi medi)	0.38	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	III	III	III
	0.5	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	III
	0.75	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I
	1	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	III	III	III	III	I	I	I	I
	1.25	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
t/R=0.4 (Archi spessi)	0.38	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III
	0.5	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	III	III	III
	0.75	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	II	I	I	I
	1	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	II	I	I	I
	1.25	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	III	I	I	I	I

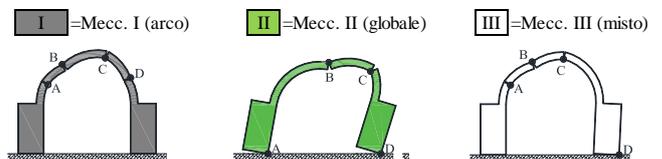


Figura 8. Meccanismi di collasso attivati.

In dettaglio, la Figura 8 è composta da quattro blocchi di righe, ognuno corrispondenti a un valore prefissato per lo spessore dell'arco  $t/R$ , e da quattro blocchi di colonne corrispondenti ai valori investigati dell'angolo al centro  $2\omega$ . Ogni blocco di righe è a sua volta suddiviso in cinque righe, ognuna corrispondente a un valore fissato della larghezza adimensionale del contrafforte  $B/R$ . Lo stesso è stato fatto per ogni blocco di colonne, che è stato suddiviso in quattro colonne ciascuna associata ad un valore del rapporto geometrico fondamentale  $h/R$ .

Gli archi collassati in accordo con il meccanismo ad arco sono stati rappresentati utilizzando un quadrato grigio con il numero romano "I" ad indicare il meccanismo I. Allo stesso modo, le modalità di collasso misto e globale sono state rappresentate con il colore verde e con il colore bianco ed etichettate con i numeri romani "II" e "III" a significare

l'attivazione del meccanismo II o del meccanismo III, rispettivamente.

Dal quadro sinottico di Figura 8 si può osservare che le modalità di collasso prevalenti sono il meccanismo misto (o Mecc. III) e, con minore ricorrenza, quello ad arco (o Mecc. I).

Infatti, il meccanismo globale (o Mecc. II) si verifica solo in due archi contraffortati semicircolari con  $t/R=0.40$  e  $h/R=1$ .

Il meccanismo misto, invece, si è sempre attivato in presenza di archi ribassati (cioè  $2\omega=90^\circ$ ), e generalmente prevale negli archi contraffortati caratterizzati dall'angolo al centro uguale a  $2\omega=150^\circ$  e la  $2\omega=120^\circ$ .

Al contrario, il meccanismo ad arco prevale in presenza degli archi semi-circolari ( $2\omega=180^\circ$ ), così come si è attivato nei casi di archi con spessore medio e contrafforti tozzi, quando l'angolo al centro è uguale a  $2\omega=150^\circ$  e  $2\omega=120^\circ$ .

Infine, dal quadro sinottico della Figura 8 si può osservare che archi contraffortati semicircolari con spessore sottile (cioè  $t/R=0.10$ ) non hanno alcuna capacità laterale perché lo spessore arco non è in grado di contenere la linea delle pressioni modificata dalla presenza di forze orizzontali.

### 6.3 Capacità sismica

I risultati dell'analisi parametrica sono riassunti nelle Figure 9, 10, 11 e 12 in termini di curve moltiplicatore di carico orizzontale  $\lambda$ -angolo al centro  $2\omega$ . In dettaglio, i diagrammi di Figura 9 si riferiscono ai risultati ottenuti sull'arco contraffortato sottile ( $t/R=0.10$ ), i diagrammi di Figura 10 e 11 si riferiscono agli archi di spessore medio (cioè  $t/R=0.20$  e  $t/R=0.30$ , rispettivamente), mentre i diagrammi di Figura 12 si riferiscono agli archi spessi ( $t/R=0.40$ ).

I cinque diagrammi di ogni figura si riferiscono ai valori considerati per il rapporto  $B/R$ , vale a dire  $B/R=0.38-0.50-0.75-1.00-1.25$ , mentre le quattro curve tracciate in ogni diagramma corrispondono ai valori considerati per il rapporto  $h/R$  (cioè  $h/R=1-2-3-4$ ), rispettivamente.

La visione d'insieme dei diagrammi delle quattro figure consente di osservare una tendenza diversa delle curve  $\lambda(2\omega, h/R)$ , a seconda dello spessore adimensionale dell'arco  $t/R$ .

Infatti, in presenza di archi sottili ( $t/R=0.10$ ) le curve  $\lambda(2\omega, h/R)$  delle Figure 9a÷9e hanno un andamento decrescente con l'angolo al centro.

Al contrario, in presenza di archi di spessore medio, i diagrammi di Figura 10a÷10e e di Figura 11a÷11e hanno un andamento sub-orizzontale con le quattro curve corrispondenti ai contrafforti tozzi ( $B/R<0.75$ ) che si sovrappongono perché le capacità orizzontali di questi casi di studio sono poco influenzati dal rapporto  $h/R$ . Infine, nei casi di archi spessi ( $t/R=0.40$ ), le curve di Figura 12a÷12e mostrano un andamento crescente di  $\lambda$  con  $2\omega$ .

Relativamente alla capacità sismica degli archi contraffortati con spessore sottile ( $t/R=0.10$ ), dai diagrammi della Figura 9 si può osservare in primo luogo che gli archi depressi hanno una maggiore capacità orizzontale mentre i semi-circolari non hanno alcuna portanza orizzontale. Si può anche osservare che le curve  $\lambda(2\omega, h/R)$  sono orizzontali negli archi ribassati, con una tendenza a diminuire con  $2\omega$ , dove le curve si sovrappongono a causa dell'attivazione del meccanismo ad arco che non è influenzato dal parametro  $h/R$ .

Inoltre, si può notare che il moltiplicatore di carico orizzontale è inferiore a  $\lambda=20\%$  in presenza di archi poco ribassati ( $2\omega\geq 150^\circ$ ), mentre la forza laterale aumenta fino a  $\lambda=40\%\div 60\%$  nei casi degli archi molto ribassati.

Per quanto riguarda le strutture ad arco di medio spessore ( $t/R=0.20$  e  $t/R=0.30$ ), come già osservato prima, le curve  $\lambda(2\omega, h/R)$  hanno un trend orizzontale perché la capacità laterale non è influenzata dall'angolo al centro. Le uniche eccezioni si osservano per gli archi contraffortati a tutto sesto delle Figure 10a÷10e caratterizzati da  $t/R=0.20$ ,  $B/R\geq 1$  e  $h/R\leq 2$ , dove le curve  $\lambda(2\omega, h/R)$  mostrano una tendenza decrescente con  $2\omega$  legata all'attivazione del meccanismo di collasso ad arco.

Valori costanti dei moltiplicatori del carico orizzontale si sono osservati nel caso di archi di medio spessore, con resistenze laterali variabili indipendentemente da  $h/R$  fino a  $\lambda=10\%$  quando  $B/R\leq 0.5$ , e comprese nell'intervallo  $\lambda=10\%\div 20\%$  quando  $B/R=0.75$ .

Infine, nel caso di contrafforti con  $B/R\geq 1$ , il moltiplicatore dei carichi orizzontali varia tra  $\lambda=20\%$  e  $\lambda=40\%$ , con le curve che mostrano valori delle capacità orizzontale che si dimezzano quando l'altezza del contrafforte aumenta da  $h/R=1$  a  $h/R=4$ .

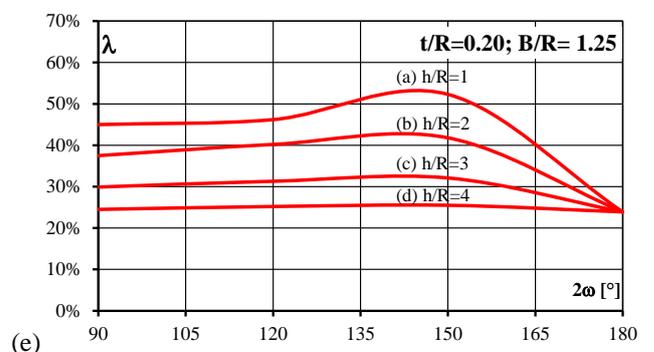
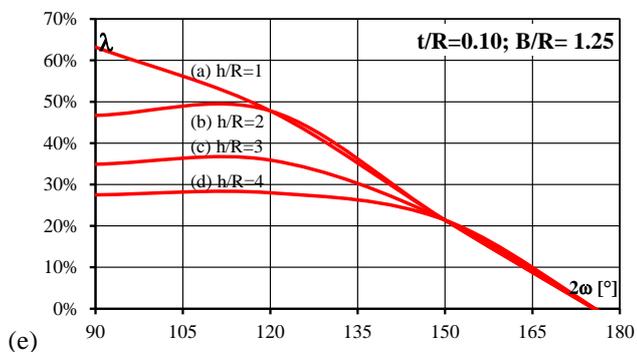
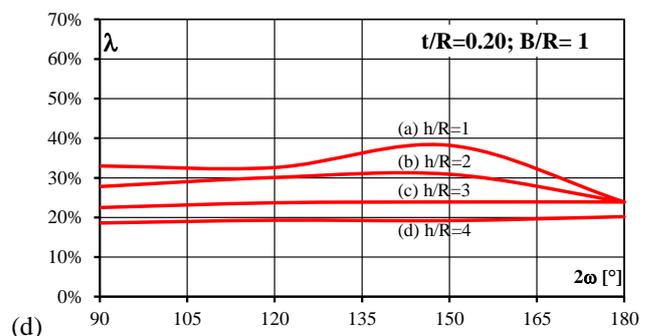
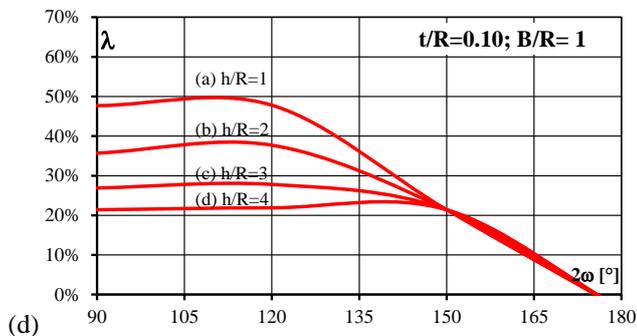
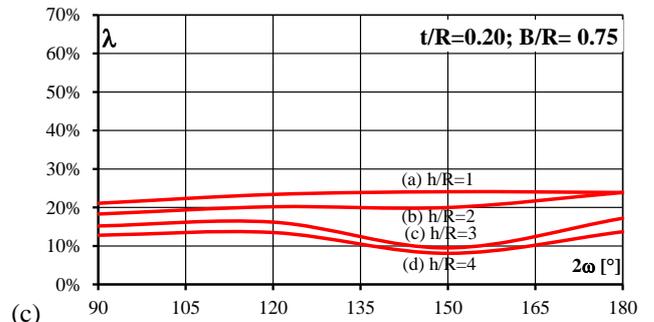
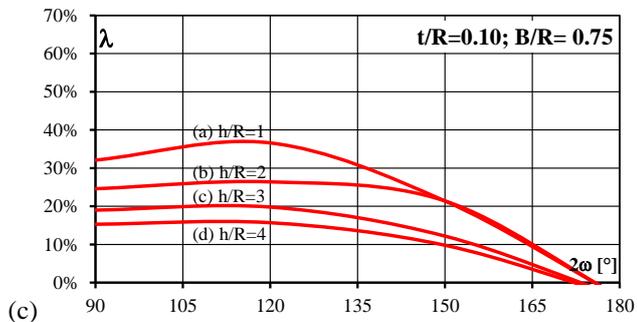
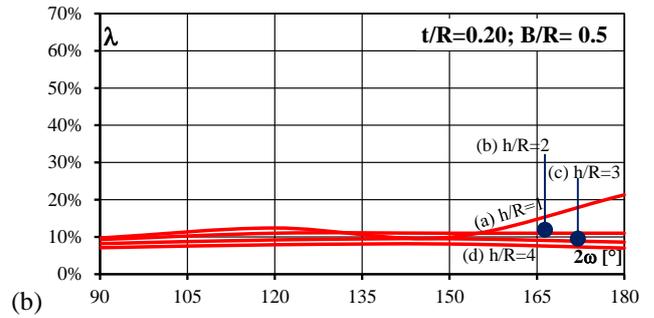
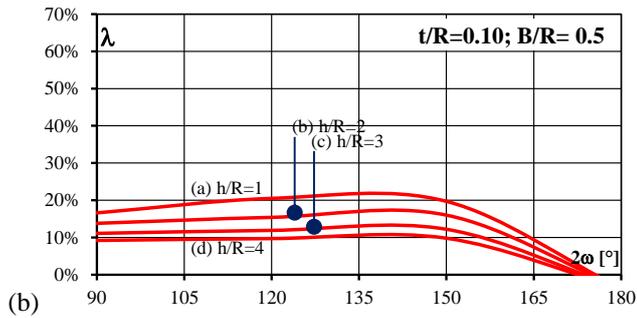
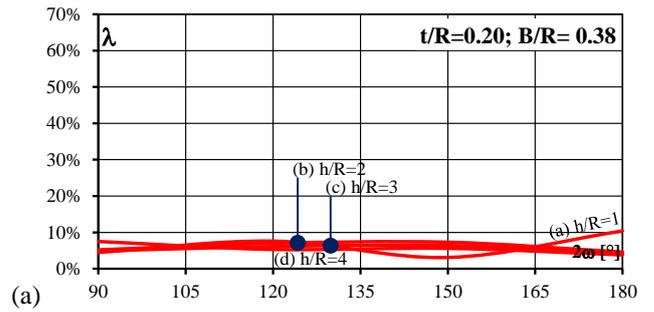
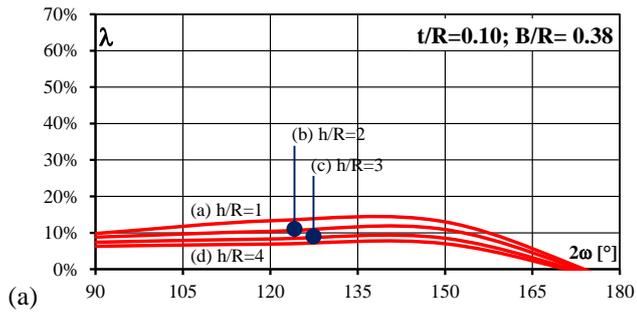


Figura 9. Effetto dell'angolo al centro sulla capacità orizzontale dei archi contraffortati sottili ( $t/R=0.1$ ).

Figura 10. Effetto dell'angolo al centro sulla capacità orizzontale dei archi contraffortati medi ( $t/R=0.2$ ).

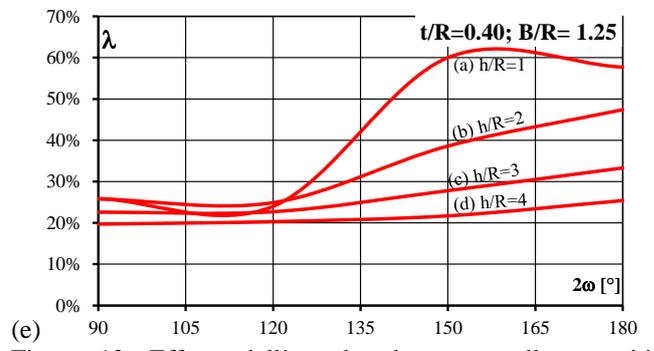
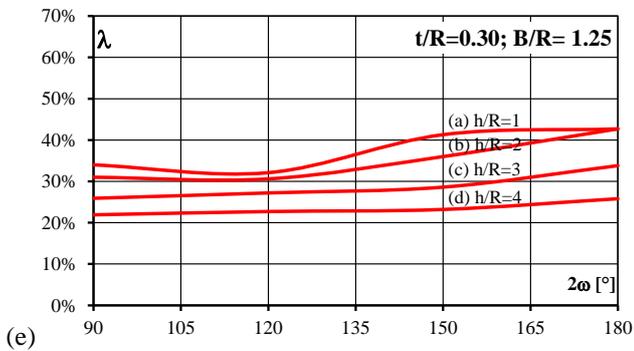
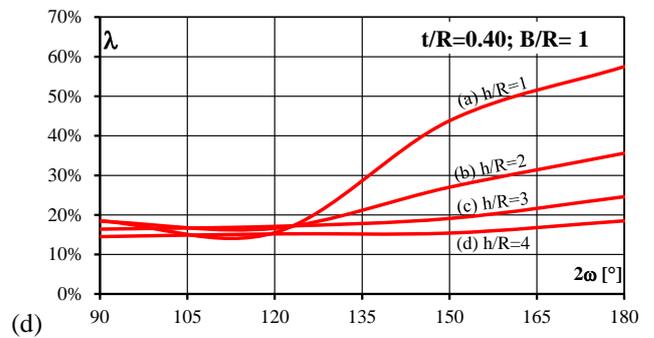
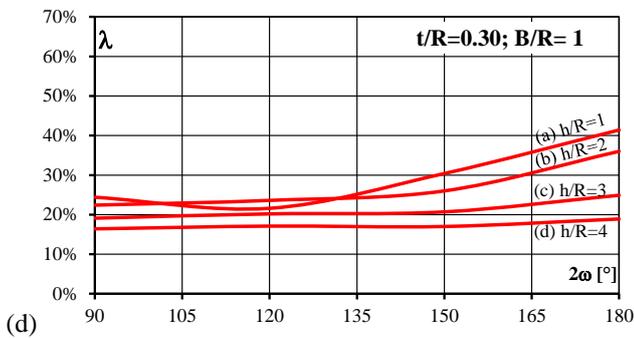
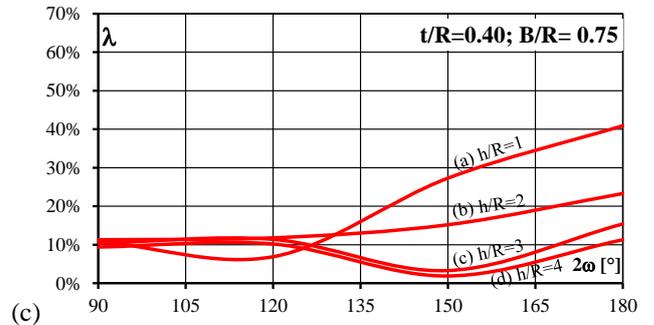
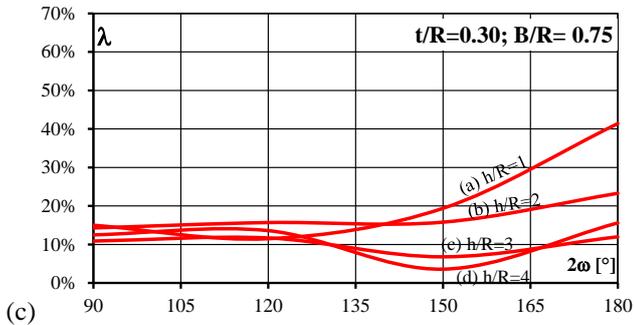
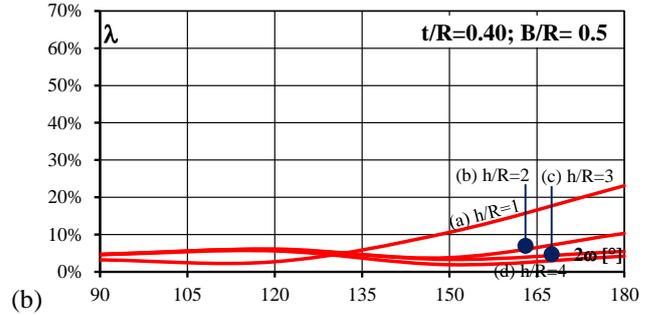
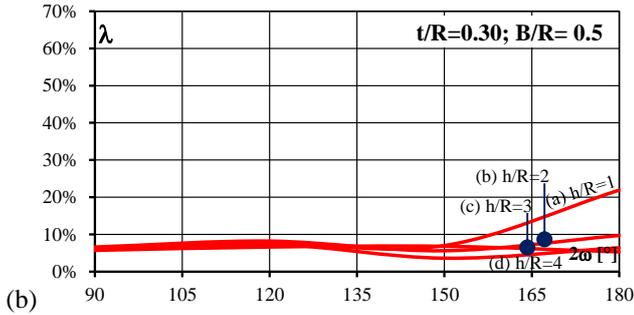
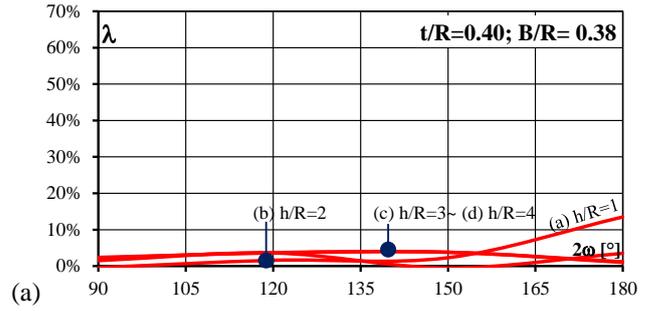
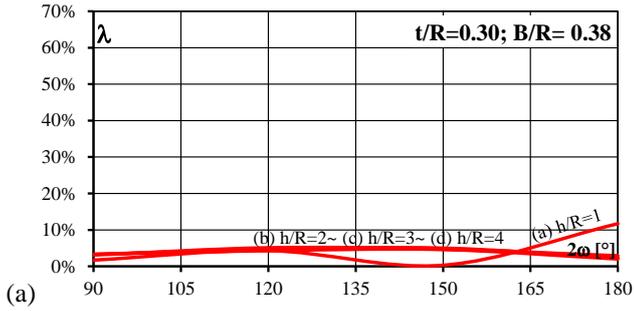


Figura 11. Effetto dell'angolo al centro sulla capacità orizzontale dei archi contraffortati medi ( $t/R=0.3$ ).

Figura 12. Effetto dell'angolo al centro sulla capacità orizzontale dei archi contraffortati spessi ( $t/R=0.4$ ).

I risultati ottenuti dall'analisi parametrica effettuata sulle strutture con archi spessi ( $t/R=0.40$ ) sono sintetizzati nei diagrammi di Figura 12, che permettono di osservare una bassa capacità orizzontale degli archi contraffortati caratterizzati da  $B/R \leq 0.5$ , che è sempre inferiore a  $\lambda=10\%$  indipendentemente dall'angolo al centro  $2\omega$  e dal rapporto  $h/R$ .

Nei casi di contrafforte con  $B/R \geq 0.75$ , si può notare che il moltiplicatore dei carichi orizzontali degli archi ribassati (cioè  $2\omega=90^\circ$  e  $2\omega=120^\circ$ ) vanno da  $\lambda=10\%$  di  $\lambda=25\%$ , indipendentemente dai parametri  $2\omega$  e  $h/R$ .

Al contrario, quando  $2\omega \geq 150^\circ$ , le curve  $\lambda(2\omega, h/R)$  mostrano un andamento crescente e si differenziano fra di loro al variare del valore del rapporto  $h/R$ , con il moltiplicatore di carico orizzontale  $\lambda$  che passa da  $\lambda=20\%$  in presenza di contrafforti alti ( $h/R=4$ ) a  $\lambda=50\%$  quando il contrafforte è basso ( $h/R=1$ ).

## 7 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stato investigato l'effetto della geometria sulla capacità sismica degli archi circolari contraffortati in muratura.

In particolare, la capacità degli archi contraffortati a resistere alle azioni orizzontali è stata valutata utilizzando una procedura di numerica sviluppata dagli autori in (Brandonisio et al. 2017a) nell'ambito dell'analisi limite delle strutture in muratura. La procedura numerica è stata utilizzata analizzando un vasto campione di archi contraffortati ottenuti variando i rapporti fondamentali che ne definiscono la geometria, vale a dire l'angolo al centro ( $2\omega$ ), lo spessore arco adimensionalizzato al raggio ( $t/R$ ), l'altezza del piedritto ( $h/R$ ) e la larghezza ( $B/R$ ).

Gli intervalli di variabilità di tali rapporti geometrici sono stati stabiliti sulla scorta delle regole dell'arte utilizzate nei secoli passati per dimensionare e costruire tali strutture.

Si è osservato che gli archi a tutto sesto sono generalmente più vulnerabili degli archi ribassati a causa dell'attivazione di differenti meccanismi di collasso. Infatti, negli archi semicircolari generalmente si attiva il meccanismo ad "arco", mentre per gli archi depressi il meccanismo prevalente è il "misto".

A ciò, inoltre, si aggiunge il fatto che gli archi a tutto sesto sono poggiati su contrafforti più snelli, a causa dei contenuti valori della spinta alle imposte, e quindi sismicamente più

vulnerabili, di quelli a sostegno degli archi ribassati, che sono generalmente più tozzi per poter contrastare la maggiore componente orizzontale della spinta.

Con maggior dettaglio, i risultati dell'analisi parametrica hanno permesso di stabilire che il meccanismo di collasso prevalente è quello "misto", mentre il meccanismo ad "arco" generalmente si verifica presenza di archi semicircolari e di archi poco ribassati ( $2\omega=150^\circ$ ) quando i piedritti sono tozzi, cioè caratterizzati da  $B/R \geq 1$ .

Il meccanismo di collasso "globale", invece, si è attivato solamente in due casi di archi semicircolari spessi ( $t/R=0.4$ ) con contrafforti tozzi, caratterizzati da  $h/R=1$  e da  $B/R=0.75 \div 1$ .

In merito alla capacità sismica, le analisi numeriche discusse nel lavoro hanno evidenziato che il moltiplicatore dei carichi orizzontali  $\lambda$  è molto sensibile alla geometria nei casi estremi di archi molto depressi ( $2\omega=90^\circ$ ) e di archi a tutto sesto ( $2\omega=180^\circ$ ), mentre nei casi di configurazioni intermedie (cioè  $2\omega=120^\circ$  e  $2\omega=150^\circ$ ), le capacità laterali sono meno influenzate dai rapporti geometrici fondamentali.

In particolare, la capacità sismica degli archi depressi e sottili ( $2\omega=90^\circ$ ,  $t/R=0.1$ ), variano fra  $\lambda=10\%$  e  $\lambda=60\%$  e sono generalmente 1.5÷2 volte maggiori della capacità degli archi con spessore intermedi (variabile da  $\lambda=5\%$  a  $\lambda=40\%$ ) e degli archi di grande spessore (variabile da  $\lambda=5\%$  a  $\lambda=25\%$ ).

In presenza di archi a tutto sesto caratterizzati da uno spessore pari a quello minimo ammissibile per i soli carichi gravitazionali (cioè  $t/R=0.1$ ), si è osservato che gli archi contraffortati non hanno alcuna capacità orizzontale.

Sempre con riferimento agli archi a tutto sesto, la massima capacità si è riscontrata in presenza di spessori medi, raggiungendo valori di picco pari a  $\lambda=30\% \div 40\%$ .

Al contrario, nel caso degli archi molto ribassati ( $2\omega=90^\circ$ ), le maggiori capacità laterali si sono osservate in presenza degli archi spessi ( $t/R=0.4$ ), con moltiplicatori dei carichi orizzontali che raggiungono valori di  $\lambda=40\% \div 50\%$  in presenza di contrafforti tozzi caratterizzati da  $h/R \leq 2$  e  $B/R \geq 1$ .

Infine, archi con angoli al centro pari a  $2\omega=120^\circ$  e a  $2\omega=150^\circ$  mostrano valori intermedi di capacità sismica, che generalmente varia da

$\lambda=5\%$  a  $\lambda=40\%$  a seconda della geometria del contrafforte.

Gli autori sottolineano l'utilità dei risultati delle analisi parametrica discussa in questa nota, sia come semplice strumento per una veloce valutazione della capacità sismica degli archi circolari contraffortati, sia come strumento di controllo dei risultati ottenuti utilizzando strumenti di analisi numerica più complessi quali l'analisi statica non lineare.

## RINGRAZIAMENTI

La ricerca è stata svolta nell'ambito del Progetto di Ricerca RELUIS "Rete di laboratori Universitari Ingegneria Sismica", WP10: Contributi normativi relativi a Costruzioni esistenti in muratura.

## BIBLIOGRAFIA

- Alberti, L. A., 1755. *The Ten Books of Architecture*. Leoni Edition.
- Albuerne, A., Huerta, S., 2010. Coulomb's theory of arches in Spain ca. 1800: the manuscript of Joaquín Monasterio". *6<sup>th</sup> Int. Conf. on Arch Bridges (ARCH'10)*. Fuzhou, China, 354–362.
- Benvenuto, E., 1981. *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. Sansoni Edizioni, Firenze.
- Brandonisio, De Luca, A., 2019a. Influence of geometry on seismic capacity of circular buttressed arches. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*.
- Brandonisio, De Luca, A., 2019b. Statics of buttressed masonry arches in light of traditional design rules. *XIX Conference The Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics - AIMETA 2019*, Rome, Italy, 15-19 September.
- Brandonisio, G., Lucibello, G., Mele, E., De Luca A., 2013. Damage and performance evaluation of masonry churches in the 2009 L'Aquila earthquake. *Engineering Failure Analysis*, **34**, 693-714.
- Brandonisio, G., Mele, E., De Luca, A., 2015. Closed form solution for predicting the horizontal capacity of masonry portal frames through limit analysis and comparison with experimental test results. *Engineering Failure Analysis*, **55**, 246-270.
- Brandonisio, G., Mele, E., De Luca, A., 2017a. Limit analysis of masonry circular buttressed arches under horizontal loads. *Meccanica*, **52**(11-12), 2547-2565.
- Brandonisio, G., Mele, E., De Luca, A., 2017b. Capacità sismica degli archi trionfali di chiese in muratura. *XVII Convegno Nazionale L'Ingegneria Sismica - ANIDIS 2017*, 4 – 7 September, Pistoia, Italy.
- Brandonisio, G., Mele, E., De Luca, A., 2017c. Seismic capacity of URM buttressed arches. *XXIII Conference The Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics - AIMETA 2017*, 4-7 September, Salerno, Italy, Vol 2, 1555-1569.
- Breyman, G.A., 1885. *Archi - Volte - Cupole. Trattato di Costruzioni Civili*. Stuttgart.
- Ciappi, A., 1935. *Corso di Scienza delle Costruzioni – Parte Seconda - Stabilità delle costruzioni isostatiche*. Cremonese, Roma.
- Colombo, G., 1877. *Manuale dell'ingegnere. - Ristampa anastatica dell'edizione del 1877-78"*. Hoepli, Milano (1991).
- Como, M., 2013. *Statics of historic masonry constructions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Corradi, M., 1998. Empirical methods for the construction of masonry arch bridges in the 19th century. *Second International Arch Bridges Conference*. 6-8 October, 25-36.
- Couplet, P., 1732. *Seconde partie de l'examen de la poussée. Histoire de l'Académie Royale des Sciences*. Paris, 117-141.
- De Belidor, B. F., 1729. *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*, Paris.
- De La Hire, P., 1729. *Traité de mécanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, & les propriétés des corps pesans lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*, Paris.
- Derand, F., 1643. *L'Architecture des voûtes, ou l'Art des traits et coupe des voûtes*, Cramoisy.
- Di Pasquale, S., 1996. *L'arte del costruire: tra conoscenza e scienza*. Marsilio, Venezia.
- Dupuit, J., 1870. *Traité de l'Equilibre des Voûtes et de la Construction des Ponts en Maçonnerie*. Dunod, Paris.
- Fabbri, H., 1669. *Physica, id est, Scientia rerum corporearum, in decem tractatibus distributa*. Lugduni.
- Gautier, H., 1716. *Traité des ponts, ou il est parlé de ceux des Romains & de ceux des modernes*. Paris.
- Gilbert, M., 2007. Limit analysis applied to masonry arch bridges: state-of-the-art and recent developments. *5<sup>th</sup> International Conference on Arch Bridges - ARCH'07*.
- Giuffrè, A., 1986. *La meccanica nell'architettura – La statica*. NIS La nuova Italia Scientifica, Roma.
- Heyman, J., 1966. The Stone Skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, **2**, 249-279.
- Heyman, J., 1969. The safety of masonry arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, **11**, 363-385.
- Heyman, J., 1982. *The Masonry Arch*. Ellis Horwood, Chichester, U.K..
- Huerta, S., 2018. *Arch bridge design in eighteenth-century France: The rule of Perronet*. Building Knowledge, Constructing Histories – Wouters, Van de Voorde, Bertels et al. (Eds), 773-780.
- Kurrer, K., 2018. *The History of the Theory of Structures - Searching for Equilibrium*. Wiley.
- Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain, A., Ratner, M., 1978. Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, **4**(1), 34-50.
- Lucibello, G., Brandonisio, G., Mele, E., De Luca, A., 2013. Seismic damage and performance of Palazzo Centi after L'Aquila earthquake: A paradigmatic case study of effectiveness of mechanical steel ties. *Engineering Failure Analysis*, **34**, 407-430.
- Makris, N., Alexakis, H., 2013. *The effect of stereotomy on the shape of the thrust-line and the minimum thickness of semicircular masonry arches*. *Acta. Mech.* **83**, 1511-1533.
- Mascheroni, L., 1785. *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, Bergamo.
- Milani, G.B., 1923. *L'Ossatura murale – Parte II L'Estetica*. S. Lattes & C. Editori, Torino.

- Milankovitch, M., 1904. *Beitrag zur Theorie der Druckkurven*. Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, K.K. Technische Hochschule.
- Milankovitch, M., 1907. *Theorie der Druckkurven*. Zeitschrift für Mathematik Und Physik 55, 1–27.
- Navier, C. L., 1833. *Résumé des Leçons données à L'École Royale des Ponts et Chaussées, sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des constructions et des machines*. 1er Parties: Leçons Paris.
- Ochsendorf, J. 2002. *Collapse of Masonry Structures*. PhD Dissertation, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge.
- Palladio, A., 1570. *I quattro libri dell'architettura*. In Venetia Appresso Domenico de' Franceschi.
- Perronet, J.R., 1748. *Mémoire sur l'épaisseur qu'il faut donner aux voûtes des ponts avectables et expériences*. Bibliothèque École des Ponts et Chaussées.
- Proske, D., van Gelder, P., 2009. *Safety of historical stone arch bridges*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Rankine, W. J. M., 1862. *A Manual of Civil Engineering*. Charles Griffin. London
- Rondelet, J.B., 1802. *Traité theorique et pratique de l'Art de Bâtir*. Chez L'auteur, Paris.
- Serlio, S., 1584. *I Sette libri dell'architettura*. In Venetia Appresso Domenico de' Franceschi.