



Ottimizzazione multi-obiettivo di modelli a elementi finiti: criteri per la scelta della soluzione ottimale

Federico Ponsi^a, Elisa Bassoli^a, Loris Vincenzi^a

^a *Dipartimento di Ingegneria "Enzo Ferrari", Via Pietro Vivarelli, 10 Modena, Italy*

Parole chiave: model updating, ottimizzazione multi-obiettivo, metodo della somma ponderata, criteri di scelta

ABSTRACT

La possibilità di avere modelli ad elementi finiti accurati riveste una grande importanza nella valutazione degli effetti di un evento sismico sulla struttura e nell'identificazione di eventuali danni. Per migliorare l'accuratezza del modello numerico è possibile utilizzare tecniche di model updating per calibrare parametri fisici/strutturali del modello sulla base dei dati misurati sulla struttura reale da un sistema di monitoraggio. La maggior parte dei problemi di calibrazione di modelli di strutture reali presenta diversi obiettivi che sono generalmente in conflitto tra loro. Un approccio comune per risolvere l'ottimizzazione multi-obiettivo è quello di minimizzare una funzione a singolo obiettivo definita come la combinazione pesata dei diversi obiettivi. L'articolo presenta l'effetto sui parametri fisici/strutturali calibrati del fattore peso che governa la funzione obiettivo nel metodo della somma ponderata. Dopo aver valutato la frontiera di Pareto, ripetendo la procedura di ottimizzazione più volte per diversi valori del fattore peso, la memoria descrive e confronta i risultati ottenuti da diversi criteri per trovare la soluzione ideale tra quelle ottime che formano la frontiera di Pareto, con lo scopo di ottenere la soluzione che rappresenta quindi il miglior compromesso tra gli obiettivi diversi. Viene proposta quindi una procedura in grado di ottenere la soluzione ideale senza la necessità di calcolare l'intera frontiera di Pareto, consentendo un notevole risparmio di tempo nell'intero processo. La procedura proposta è presentata attraverso il caso studio della Rocca di San Felice sul Panaro, gravemente danneggiata durante gli eventi sismici dell'Emilia nel 2012.

1 INTRODUZIONE

La possibilità di possedere modelli ad elementi finiti accurati riveste una grande importanza nella valutazione degli effetti di un evento sismico sulla struttura e nell'identificazione di eventuali danni. La calibrazione risulta di fondamentale importanza soprattutto nei problemi di identificazione e di localizzazione del danno, in quanto si possono ottenere risultati anche molto lontani dalla realtà se non si dispone di un modello che approssimi con sufficiente accuratezza i parametri strutturali monitorati in continuo. Per migliorare l'accuratezza del modello numerico è possibile utilizzare tecniche di model updating, calibrando parametri fisici/strutturali del modello sulla base dei dati misurati sulla struttura reale da un sistema di monitoraggio. La maggior parte dei problemi di calibrazione di modelli di strutture reali presenta diversi obiettivi che sono generalmente in conflitto tra loro ma che concorrono ad una migliore definizione del problema di identificazione o localizzazione del danno. Infatti, l'approccio vincente per la

localizzazione del danno è spesso basato sulla definizione di obiettivi "globali" e obiettivi "locali" (Savoia et al., 2009) in quanto la calibrazione sulla base di pochi parametri o parametri della stessa tipologia (esempio solo parametri globali) potrebbe portare a risultati inaccettabili (Konak et al., 2006). Nel campo della dinamica strutturale e dell'identificazione del danno, le proprietà modali, come frequenze naturali e forme modali, sono spesso utilizzate come proprietà di riferimento per la definizione degli obiettivi, in quanto esse possono essere identificate dai soli dati in uscita misurati in condizioni d'esercizio della struttura. Le prime possono essere considerate parametri globali, in quanto derivanti dall'insieme di geometria e caratteristiche meccaniche dell'intera struttura. Le seconde, invece, sono più sensibili alla presenza di danni localizzati e di limitata entità.

I problemi di ottimizzazione multi-obiettivo possono essere affrontati secondo due approcci differenti. Il primo consiste nella risoluzione diretta del problema, investigando un insieme di

soluzioni che soddisfino i diversi obiettivi senza essere dominate da altre soluzioni. Questo insieme costituisce la frontiera di Pareto, cioè l'insieme di tutte le possibili soluzioni non dominate (Pareto, 1971). Nel passato sono stati sviluppati numerosi metodi, spesso appartenenti alla famiglia degli algoritmi genetici ed evolutivi, in grado di ottenere l'intera frontiera di Pareto o una sua significativa porzione (Konak et al., 2006). Il secondo approccio prevede invece la combinazione dei differenti obiettivi in un'unica funzione obiettivo da minimizzare (approccio mono-obiettivo) per potere applicare algoritmi di ottimizzazione standard. Uno dei metodi più utilizzati appartenenti a questa seconda tipologia, soprattutto nell'ambito della calibrazione di modelli agli elementi finiti, è il metodo della somma ponderata applicata ai singoli obiettivi (Kim e de Weck, 2005). Le semplificazioni effettuate in fase di modellazione e le incertezze che caratterizzano le misure sperimentali fanno sì che la scelta del peso tra gli obiettivi influenzi il risultato. La scelta di tale fattore risulta quindi determinante per una buona calibrazione del modello. I principali vantaggi nell'utilizzo del metodo della somma ponderata sono la semplicità dell'implementazione ed il fatto che il peso permetta di quantificare l'importanza relativa di ogni obiettivo. Infine, è possibile ottenere la frontiera di Pareto anche con il metodo della somma pesata, ripetendo l'ottimizzazione per diversi valori del fattore peso.

Una volta che la frontiera di Pareto è stata generata, direttamente attraverso la prima famiglia di metodi o con ottimizzazioni successive al crescere del peso col metodo della somma ponderata, è necessario un criterio decisionale per la scelta della soluzione preferita tra le ottime che costituiscono la frontiera di Pareto. Questa decisione può essere basata su requisiti aggiuntivi e talvolta soggettivi anche se è possibile definire alcuni criteri per potere guidare la scelta. Alcuni criteri presenti in letteratura sono: la minima distanza dal punto di equilibrio (Dincer et al., 2017), il *fuzzy satisfying approach* (Majdi et al., 2017) e la massima distanza dalla corda (Deb e Gupta, 2010).

In ogni caso, quando si ha a che fare con modelli agli elementi finiti di strutture complesse, la determinazione della frontiera di Pareto diventa un compito molto oneroso, a causa delle numerose analisi modali necessarie. Per questa ragione, sarebbe opportuno che la procedura per l'identificazione della soluzione preferita non richiedesse la determinazione dell'intera frontiera. A parte alcune proposte (Kim e de Weck, 2005 e Christodoulou et al., 2008), esistono pochi studi in

letteratura riguardo la diretta determinazione del modello calibrato ottimale.

Questo articolo propone un confronto fra tre procedure per la determinazione diretta della soluzione preferita, senza la necessità di definire l'intera frontiera di Pareto. Ognuna di queste è stata sviluppata seguendo l'approccio mono-obiettivo e definendo la funzione obiettivo da minimizzare sulla base di uno dei tre criteri di scelta precedentemente citati. Le procedure di ottimizzazione sono tutte condotte utilizzando l'algoritmo evolutivo DE-S, proposto da Vincenzi e Gambarelli (2017). Queste procedure sono testate su due casi studio per valutarne l'efficienza e la robustezza. Il primo è un caso studio numerico di un semplice telaio, creato per studiare l'influenza della variabilità insita nella procedura sui risultati ottenuti. Il secondo è il caso studio della Rocca di San Felice sul Panaro, una fortezza storica in muratura che è stata severamente danneggiata dagli eventi sismici che hanno colpito l'Emilia nel 2012.

2 OTTIMIZZAZIONE MULTI-OBIETTIVO E CRITERI DI SCELTA DELLA SOLUZIONE PREFERITA

Nella calibrazione di modelli agli elementi finiti, gli obiettivi sono generalmente definiti come le differenze ottenute dal confronto tra le evidenze sperimentali e le predizioni del modello. Senza perdere di generalità, nel seguito si descrive il problema dell'ottimizzazione bi-obiettivo. Esso viene posto come:

$$\begin{cases} \min \{e_1(\mathbf{x}), e_2(\mathbf{x})\} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (1)$$

dove \mathbf{x} è il vettore degli n parametri da calibrare di dimensione $n \times 1$, $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^n$ rappresenta l'insieme dei possibili valori che i parametri possono assumere ed e_i è il generico i -esimo obiettivo, definito come:

$$e_i : \mathcal{S} \mapsto \mathbf{R}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

La risoluzione di questo problema dà luogo ad un insieme di soluzioni ottimali, cioè non dominate da altre soluzioni, denominato frontiera di Pareto (Pareto, 1971). Una generica soluzione \mathbf{x}_A domina la soluzione \mathbf{x}_B se sono rispettate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} e_i(\mathbf{x}_A) \leq e_i(\mathbf{x}_B) & \text{per } i = 1, 2 \\ e_i(\mathbf{x}_A) < e_i(\mathbf{x}_B) & \text{per almeno un indice } i \end{cases} \quad (3)$$

Di conseguenza, un vettore \mathbf{x}^* è una soluzione ottima secondo Pareto se non esiste un altro vettore che domina \mathbf{x}^* in accordo all'equazione (3). Nell'ambito della dinamica strutturale le proprietà modali sono solitamente prese come riferimento, perciò gli obiettivi e_1 ed e_2 sono definiti come l'errore sulle frequenze e_F e l'errore sulle forme modali e_M :

$$e_F = \sum_{i=1}^N \left(\frac{f_{num,i} - f_{sp,i}}{f_{sp,i}} \right)^2 \quad (4)$$

$$e_M = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1 - \text{MAC}(\varphi_{num,i}, \varphi_{sp,i})}{\text{MAC}(\varphi_{num,i}, \varphi_{sp,i})}} \quad (5)$$

dove N è il numero di modi selezionati per la calibrazione, $f_{sp,i}$ e $\varphi_{sp,i}$ sono le frequenze e le forme modali sperimentali, $f_{num,i}$ e $\varphi_{num,i}$ sono le frequenze e le forme modali ottenute dal modello numerico e MAC è il noto *Modal Assurance Criterion* (Allemang e Brown, 1982).

In accordo al metodo della somma ponderata (Kim e de Weck, 2005), si definisce la funzione mono-obiettivo H da minimizzare come la somma pesata dei due obiettivi e_F ed e_M :

$$H(\mathbf{x}) = \alpha e_F(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) e_M(\mathbf{x}) \quad (6)$$

dove $\alpha \in [0,1]$ è il peso che misura l'importanza relativa tra gli obiettivi. Per effetto delle incertezze che caratterizzano il modello numerico e le misure sperimentali, la scelta di valori diversi per il fattore peso α può portare a soluzioni differenti. La frontiera di Pareto può essere quindi generata risolvendo il problema di ottimizzazione adottando valori crescenti di α .

Una volta generata la frontiera, è necessaria una decisione per scegliere la soluzione preferita all'interno dell'insieme di quelle ottimali. Nel seguito vengono descritti il criterio della minima distanza dal punto di equilibrio (Dincer et al., 2017), il *fuzzy satisfying approach* (Majidi et al., 2017) e il criterio della massima distanza dalla corda (Deb e Gupta, 2010).

2.1 Criterio A: Minima distanza dal punto di equilibrio

In questo primo criterio la soluzione preferita è identificata come il punto della frontiera di Pareto avente distanza minima dal punto di equilibrio Q (Figura 1). Q è un punto ipotetico, che non appartiene alla frontiera, in cui entrambi gli obiettivi esibiscono il loro valore minimo indipendentemente dall'altro. Le sue coordinate sono (e_F^{\min}, e_M^{\min}) . Il punto della frontiera di Pareto

più vicino al punto di equilibrio Q assicura il miglior compromesso tra errore sulle frequenze ed errore sulle forme modali. La distanza di una generica soluzione k dal punto di equilibrio si esprime come:

$$d(k, Q) = \sqrt{[e_F(k) - e_F^{\min}]^2 + [e_M(k) - e_M^{\min}]^2} \quad (7)$$

2.2 Criterio B: Fuzzy satisfying approach

La soluzione preferita è identificata come quella che può offrire compromesso tra gli obiettivi in conflitto. Per prima cosa, si determina il *fuzzy membership* di ogni obiettivo, definito nell'intervallo $[0,1]$:

$$\Psi_{k,e_F} = \begin{cases} 1 & \text{per } e_F(k) < e_F^{\min} \\ \frac{e_F(k) - e_F^{\max}}{e_F^{\min} - e_F^{\max}} & \text{per } e_F^{\min} \leq e_F(k) \leq e_F^{\max} \\ 0 & \text{per } e_F(k) > e_F^{\max} \end{cases} \quad (8)$$

$$\Psi_{k,e_M} = \begin{cases} 1 & \text{per } e_M(k) < e_M^{\min} \\ \frac{e_M(k) - e_M^{\max}}{e_M^{\min} - e_M^{\max}} & \text{per } e_M^{\min} \leq e_M(k) \leq e_M^{\max} \\ 0 & \text{per } e_M(k) > e_M^{\max} \end{cases} \quad (9)$$

dove e_F^{\max} e e_M^{\max} sono i valori massimi degli obiettivi. Ψ_{k,e_F} e Ψ_{k,e_M} esprimono quanto sia ottima la soluzione k per gli obiettivi e_F e e_M , rispettivamente. Si definisce quindi per la soluzione k -esima la quantità:

$$\Psi_k = \min(\Psi_{k,e_F}, \Psi_{k,e_M}) \quad (10)$$

La soluzione preferita è caratterizzata dal massimo valore della funzione Ψ :

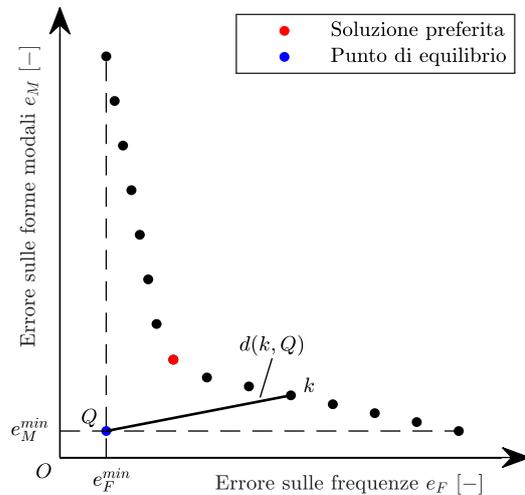


Figura 1. Criterio A: minima distanza dal punto di equilibrio.

$$k_{pref} = \arg \max(\Psi_k) \quad (11)$$

Per la successiva applicazione del criterio (vedi paragrafo 3.3) risulta conveniente definire una funzione da minimizzare, perciò nel seguito si farà riferimento a funzioni analoghe. Si definisce il valore Φ definito nell'intervallo $[-1,0]$ al posto di Ψ :

$$\Phi_{k,e_F} = \begin{cases} -1 & \text{per } e_F(k) < e_F^{\min} \\ \frac{e_F(k) - e_F^{\max}}{e_F^{\max} - e_F^{\min}} & \text{per } e_F^{\min} \leq e_F(k) \leq e_F^{\max} \\ 0 & \text{per } e_F(k) > e_F^{\max} \end{cases} \quad (12)$$

$$\Phi_{k,e_M} = \begin{cases} -1 & \text{per } e_M(k) < e_M^{\min} \\ \frac{e_M(k) - e_M^{\max}}{e_M^{\max} - e_M^{\min}} & \text{per } e_M^{\min} \leq e_M(k) \leq e_M^{\max} \\ 0 & \text{per } e_M(k) > e_M^{\max} \end{cases} \quad (13)$$

e si considera, per la soluzione k -esima la quantità:

$$\Phi_k = \max(\Phi_{k,e_F}, \Phi_{k,e_M}) \quad (14)$$

La soluzione preferita è caratterizzata dal minimo valore della funzione Φ :

$$k_{pref} = \arg \min(\Phi_k) \quad (15)$$

2.3 Criterio C: Massima distanza dalla corda

Si consideri la corda $L(P_1, P_2)$ che unisce i punti di estremità P_1 e P_2 della frontiera di Pareto (Figura 2), di equazione:

$$e_M = me_F + q \quad (16)$$

dove:

$$m = \frac{e_M(P_2) - e_M(P_1)}{e_F(P_2) - e_F(P_1)} = \frac{e_M^{\min} - e_M^{\max}}{e_F^{\max} - e_F^{\min}} \quad (17)$$

è il coefficiente angolare e

$$q = e_M(P_1) - me_F(P_1) \quad (18)$$

rappresenta il valore dell'intercetta per $e_F = 0$. La migliore soluzione è identificata come il punto della frontiera di Pareto caratterizzato dalla massima distanza dalla corda. La distanza di un punto k appartenente alla frontiera di Pareto dalla corda si esprime come:

$$d(k, L) = \frac{|e_M(k) - (me_F(k) + q)|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (19)$$

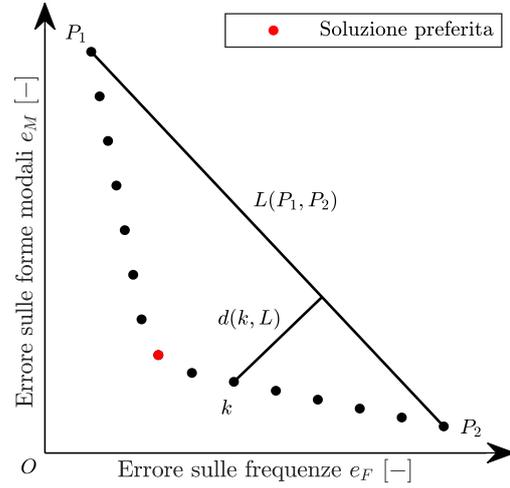


Figura 2. Criterio C: massima distanza dalla corda.

3 DETERMINAZIONE DIRETTA DELLA SOLUZIONE PREFERITA

La generazione dell'intera frontiera di Pareto può rappresentare un'operazione molto dispendiosa dal punto di vista computazionale, soprattutto per applicazioni reali in cui si ha a che fare con modelli numerici particolarmente complessi. Per tale ragione, questo lavoro propone e confronta tre diverse procedure che consentono la determinazione "diretta" della soluzione preferita, dove con "diretta" si intende una procedura iterativa ma senza la necessità di descrivere l'intera frontiera di Pareto.

Le tre procedure definiscono funzioni mono-obiettivo da ottimizzare, combinando insieme i singoli obiettivi, e si propongono di ottenere il solo punto della frontiera di Pareto caratterizzato dalla minima distanza dal punto di equilibrio, dal minimo della funzione Φ_k del *fuzzy satisfying approach* o dalla distanza massima dalla corda. Per tale motivo le tre procedure e le relative funzioni mono-obiettivo verranno denominate DP(A), DP(B) e DP(C), rispettivamente.

Le tre procedure hanno in comune l'algoritmo di ottimizzazione utilizzato, ossia l'algoritmo DE-S proposto da Vincenzi e Gambarelli (2017). L'algoritmo è di tipo evolutivo e offre il vantaggio di trattare e confrontare simultaneamente una popolazione di vettori candidati. In aggiunta, le tre funzioni obiettivo da minimizzare non dipenderanno esclusivamente degli obiettivi e_F ed e_M , ma anche dai valori estremali di e_F ed e_M . Tali valori saranno aggiornati durante le iterazioni compiute dall'algoritmo. Per questo motivo vi è la necessità di salvare in un database i punti precedentemente valutati, aggiornare il valore della funzione mono-obiettivo durante l'analisi se cambiano i valori estremali degli obiettivi e

sfruttare i punti precedentemente calcolati per ottenere la nuova popolazione all'iterazione successiva, senza vedere reso vano lo sforzo computazionale fino a quel momento effettuato o dovere riprendere da capo la risoluzione. L'algoritmo DE-S, infatti, utilizza i punti precedentemente calcolati per calibrare una superficie polinomiale atta ad approssimare la funzione obiettivo. In tal contesto, è essenziale l'aggiornamento del valore della funzione obiettivo di tutti i punti per ottenere buoni punti (candidati) della generazione successiva. Inoltre, il DE-S utilizza i valori della funzione obiettivo dei punti precedentemente valutati per dare un punteggio ai potenziali membri della generazione successiva: ad esempio, se un nuovo candidato si trova prossimo ad un punto che ha valore alto della funzione obiettivo, tale punto non verrà preso in considerazione e non verrà risolto il problema agli elementi finiti in quanto la probabilità di fornire risultati soddisfacenti sarà tanto più bassa quanto più si trova vicino a punti con i più alti valori della funzione obiettivo. Infine, un punto che appartiene alla generazione precedente può avere un valore della funzione obiettivo basso ed essere riconsiderato se un estremo cambia durante la procedura di ottimizzazione. Per i dettagli dell'algoritmo DE-S si veda Vincenzi e Gambarelli (2017).

Le tre procedure si articolano nelle seguenti fasi:

1 – si assumono i valori estremali di e_F ed e_M , secondo le indicazioni proprie di ogni procedura;

2 – per ogni set di parametri meccanici o geometrici \mathbf{x} da calibrare, si determina il valore della funzione mono-obiettivo, definita nel seguito per le tre procedure;

3 – si esegue un processo di ottimizzazione con l'algoritmo DE-S, aggiornando i valori estremali durante il processo di ottimizzazione;

4 – si esegue una stima a posteriori e diretta del valore ottimale del peso α che avrebbe portato allo stesso risultato utilizzando il metodo della somma ponderata.

Nel seguito si riportano le procedure DP(A), DP(B) e DP(C), descrivendo le funzioni mono-obiettivo da minimizzare e i criteri di aggiornamento delle variabili.

3.1 Procedura e funzione obiettivo DP(A)

La procedura DP(A) consiste nel definire la funzione obiettivo δ_A , che rappresenta la distanza tra un punto del piano degli obiettivi e il punto di equilibrio:

$$\delta_A = \sqrt{[e_F(\mathbf{x}) - e_F^{\min}]^2 + [e_M(\mathbf{x}) - e_M^{\min}]^2} \quad (20)$$

dove e_F^{\min} ed e_M^{\min} rappresentano i valori minimi degli obiettivi tra i vettori presenti nel database fino a quel momento.

Quando per un generico i -esimo vettore si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} e_F^i &< e_F^{\min} \\ e_M^i &< e_M^{\min} \end{aligned} \quad (21)$$

il/i minimo/i sono aggiornato/i e la funzione δ_A viene ricalcolata per la totalità dei vettori, anche quelli precedentemente considerati.

L'equazione (20) non contiene esplicitamente il peso α che misura l'importanza relativa fra gli obiettivi. Una volta che l'ottimizzazione è conclusa, il peso α associato alla soluzione preferita può essere stimato come segue. Si consideri la porzione di una generica frontiera di Pareto rappresentata in Figura 3. Il punto della frontiera caratterizzato dalla minima distanza dal punto di equilibrio Q è indicato con P . In accordo al teorema di Taylor, la frontiera di Pareto nell'intorno di P può essere approssimata da un polinomio di Taylor del primo ordine. Introducendo la quantità:

$$\gamma = \frac{e_F(P) - e_F^{\min}}{e_M(P) - e_M^{\min}}, \quad (22)$$

la pendenza del segmento QP vale $1/\gamma$. La tangente alla frontiera in P (linea blu in Figura 3) è perpendicolare al segmento QP ed ha equazione:

$$e_M = e_M(P) - \gamma[e_F - e_F(P)] \quad (23)$$

Le coordinate di un punto T posto sulla tangente vicino a P sono:

$$\begin{aligned} e_F(T) &= e_F(P) + \varepsilon \\ e_M(T) &= e_M(P) - \gamma\varepsilon \end{aligned} \quad (24)$$

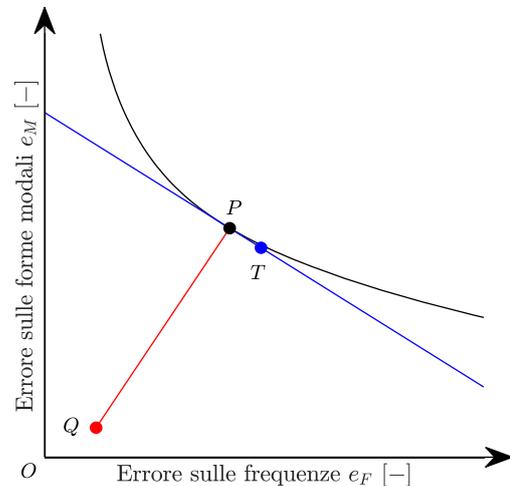


Figura 3. Procedura DP(A): approssimazione locale della frontiera di Pareto.

dove si assume che ε sia piccolo. Secondo il metodo della somma pesata (equazione (6)) la funzione obiettivo H valutata in P e T è:

$$\begin{cases} H(P) = \alpha_P e_F(P) + (1 - \alpha_P) e_M(P) \\ H(T) = \alpha_T e_F(T) + (1 - \alpha_T) e_M(T) \end{cases} \quad (25)$$

Se ε è molto piccolo, si può assumere che i punti P e T siano caratterizzati da valori molto simili del peso α e della funzione obiettivo H :

$$\begin{cases} H(P) \approx H(T) \\ \alpha_P \approx \alpha_T \end{cases} \quad (26)$$

Sostituendo le equazioni (24) e (26) nell'equazione (25), si ottiene una stima del peso α associato alla soluzione preferita:

$$\alpha_{DP(A)} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \quad (27)$$

3.2 Procedura e funzione obiettivo DP(B)

Nella procedura DP(B) si definisce la funzione obiettivo Φ_B , in analogia all'equazione (14), come:

$$\Phi_B = \max(\Phi_{B,e_F}, \Phi_{B,e_M}) \quad (28)$$

dove:

$$\Phi_{B,e_F} = \frac{e_F(\mathbf{x}) - e_F^{\max}}{e_F^{\max} - e_F^{\min}} \quad (29)$$

$$\Phi_{B,e_M} = \frac{e_M(\mathbf{x}) - e_M^{\max}}{e_M^{\max} - e_M^{\min}} \quad (30)$$

Come per la procedura DP(A), e_F^{\min} ed e_M^{\min} rappresentano i minimi assoluti degli obiettivi tra i vettori indagati fino a quel momento, mentre e_F^{\max} ed e_M^{\max} sono i valori degli obiettivi associati ai punti corrispondenti a e_M^{\min} ed e_F^{\min} , rispettivamente. Questa distinzione è necessaria in quanto i valori massimi introdotti nel paragrafo 2.2 si riferiscono ai punti della frontiera di Pareto. Considerare genericamente i valori massimi di tutti i punti calcolati porterebbe a risultati non soddisfacenti in quanto durante la procedura si valutano numerosi punti dominati, ovvero che non appartengono alla frontiera di Pareto e che, pertanto, presentano valori di e_F ed e_M anche molto elevati.

Quando almeno una delle due condizioni riportate nell'equazione (21) sarà rispettata si procederà all'aggiornamento dei valori estremali e della funzione obiettivo per tutti i vettori contenuti nel database.

Confrontando le equazioni (29) e (30) con le equazioni (12) e (13) si nota come nella procedura

proposta non siano più utilizzate le limitazioni inferiori e superiori di Φ . Tale scelta è obbligata dal fatto che, se fossero mantenute le limitazioni, nelle prime fasi della ricerca un grande numero di vettori all'interno della stessa popolazione avrebbe valore di Φ_B nullo, con conseguente fallimento della procedura di ricerca del minimo.

Una volta determinata la soluzione preferita P , è possibile stimare il peso α ad essa associato considerando il punto T più vicino a P ottenuto durante l'analisi, posto sulla (o in prossimità) frontiera di Pareto. La funzione obiettivo H (equazione (6)) valutata in P e T è indicata nell'equazione (25). Supponendo che T sia molto vicino a P , l'approssimazione mostrata nell'equazione (26) si può ritenere valida, e la stima del peso corrisponde a:

$$\alpha_{DP(B)} = \frac{\Delta e_M^{T-P}}{\Delta e_F^{P-T} + \Delta e_M^{T-P}} \quad (31)$$

dove:

$$\Delta e_M^{T-P} = e_M(T) - e_M(P) \quad (32)$$

$$\Delta e_F^{P-T} = e_F(P) - e_F(T) \quad (33)$$

3.3 Procedura e funzione obiettivo DP(C)

La procedura DP(C) consiste nella definizione della funzione obiettivo δ_C , che rappresenta la distanza (con segno) tra un punto nel piano degli obiettivi e la retta passante per i punti non dominati di estremità, che ha coefficiente angolare m ed intercetta q , definiti dalle equazioni (17) e (18):

$$\delta_C = \frac{e_M(\mathbf{x}) - m \cdot e_F(\mathbf{x}) - q}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (34)$$

In analogia a quanto detto per la procedura DP(B) al paragrafo 3.2, il valore massimo di un obiettivo è il massimo tra i punti non dominati trovati fino a quel momento e non il valore massimo in assoluto. Il segno è introdotto per differenziare i punti appartenenti al semipiano sottostante la retta, tra i quali ci si aspetta di trovare la soluzione ottimale, da quelli appartenenti al semipiano sovrastante. Dato un generico j -esimo vettore si avrà:

$$\begin{cases} \delta_C < 0 \text{ per } e_M^j < m e_F^j + q \\ \delta_C > 0 \text{ per } e_M^j > m e_F^j + q \end{cases} \quad (35)$$

per cui i migliori vettori di una popolazione avranno valore negativo di δ_C .

Similmente a DP(A) e DP(B), nel momento in cui si verifica almeno una delle condizioni riportate nell'equazione (21), i valori estremali e la

funzione obiettivo di ogni vettore contenuto nel database saranno aggiornati.

La stima del peso α , una volta trovata la soluzione ottimale, avviene in maniera affine a quanto descritto al paragrafo 3.1 per la procedura DP(A). Si consideri la generica frontiera di Pareto rappresentata in Figura 4. Il punto caratterizzato dalla massima distanza dalla corda che unisce i punti estremali non dominati P_1 e P_2 è indicato con P . Si ipotizza che la tangente alla frontiera di Pareto passante per P (linea blu in Figura 4) abbia pendenza uguale alla pendenza della corda. L'equazione della tangente è:

$$e_M = e_M(P) + m[e_F - e_F(P)] \quad (36)$$

dove m è il coefficiente angolare della corda.

Considerando un punto T posto sulla tangente vicino a P e ripetendo il ragionamento fatto al paragrafo 3.1, si ottiene la stima del peso α per il metodo DP(C):

$$\alpha_{DP(C)} = \frac{m}{m-1} \quad (37)$$

4 CASO STUDIO: TELAIO PIANO

In questo paragrafo si adotta come caso studio numerico una semplice struttura a pochi gradi di libertà. Ciò permettere di ripetere per un numero statisticamente significativo di volte la stessa procedura di ottimizzazione e valutare la robustezza della procedura e la variabilità dei risultati.

4.1 Descrizione della struttura

Il caso studio in esame è un telaio shear-type composto da tre piani (Figura 5) con masse concentrate ai piani.

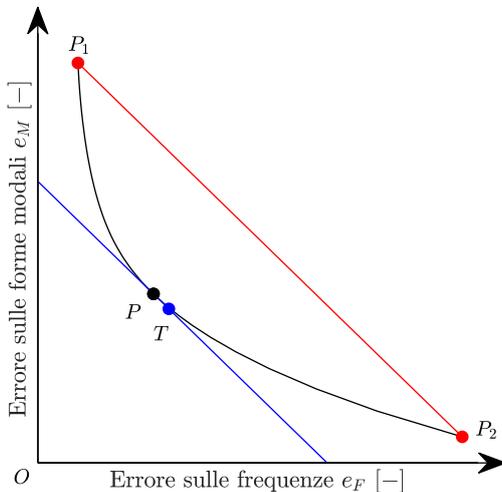


Figura 4. Procedura DP(C): approssimazione locale della frontiera di Pareto.

Nella Tabella 1 sono elencati i parametri geometrici e meccanici della struttura. Le corrispondenti proprietà modali, indicate come esatte, sono riportate nella Tabella 2. Nella tabella, con φ_1 , φ_2 e φ_3 si sono indicate le tre forme modali e la tabella riporta, in colonna, le componenti della forma modale.

Per simulare un caso reale, in cui le proprietà modali determinate sperimentalmente differiscono inevitabilmente da quelle esatte, si assumono come riferimento per la procedura di ottimizzazione le proprietà modali pseudo-sperimentali. Esse sono ottenute variando i valori esatti di frequenze e forme modali. I valori esatti e i quelli pseudo-sperimentali sono riportati nelle Tabelle 2 e 3.

I parametri meccanici da identificare sulla base dei valori pseudo-sperimentali delle proprietà modali sono la massa m_1 e l'altezza h_1 del primo piano. I parametri incogniti sono cercati imponendo i seguenti vincoli:

Tabella 1. Caso studio: parametri geometrici e meccanici.

Piano N°	Altezza colonne [m]	Dimensione colonne [m ²]	Modulo di elasticità [GPa]	Massa [10 ³ kg]
1	4.1	0.3×0.45	30	41.0
2	2.4	0.3×0.45	30	16.0
3	2.8	0.3×0.45	30	16.0

Tabella 2. Caso studio: proprietà modali esatte.

Modo N°	Frequenza [Hz]	φ_1 [-]	φ_2 [-]	φ_3 [-]
1	2.794	0.8537	0.9340	1.0000
2	10.231	-0.5063	0.1151	1.0000
3	19.999	-0.2350	1.0000	-0.4200

Tabella 3 Caso studio: proprietà modali pseudo-sperimentali.

Modo N°	Frequenza [Hz]	φ_1 [-]	φ_2 [-]	φ_3 [-]
1	2.797	0.8023	0.9639	1.0000
2	10.590	-0.5131	0.1040	1.0000
3	20.059	-0.2102	1.0000	-0.3519

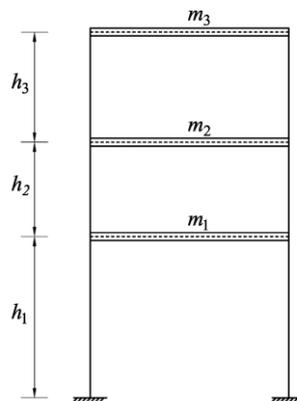


Figura 5. Caso studio: schema statico della struttura.

$$m_1 + m_2 = 57 \times 10^3 \text{ kg} \quad (38)$$

$$h_1 + h_2 = 6.5 \text{ m} \quad (39)$$

mentre i valori di m_3 e h_3 sono mantenuti fissi. Il parametro m_1 è cercato nell'intervallo [5; 55] 10^3 kg mentre h_1 nell'intervallo [1.3; 4.8] m.

4.2 Confronto tra le procedure

La calibrazione del modello viene eseguita 100 volte per ogni procedura proposta, mantenendo uguali i valori delle proprietà modali pseudo-sperimentali. Nella Tabella 4 si riporta la statistica dei risultati ottenuti, in termini di valore medio e coefficiente di variazione degli obiettivi e_F ed e_M e del peso α stimato. Non si riporta la statistica relativa ai parametri identificati in quanto i valori ottimali di m_1 e h_1 variano in un insieme ristretto indipendentemente dal valore del peso α assunto. In Tabella 4, e nelle successive Tabella 5 e Tabella 6, si è indicato con μ il valore medio e con CV il coefficiente di variazione.

La Tabella 4 evidenzia come la variabilità dei risultati per il metodo DP(A) sia ridotta rispetto a quella delle altre procedure. In particolare, il coefficiente di variazione dell'obiettivo e_F per DP(A) (2.3 %) è notevolmente inferiore a quello di DP(B) e DP(C) (26.3 % e 32.7 %, rispettivamente). Anche per l'obiettivo e_M , DP(A) presenta il coefficiente di variazione più basso, nonostante le differenze con gli altri metodi siano più contenute. Infine, si riscontra una netta differenza tra la variabilità dei pesi stimati associati alla soluzione preferita: i coefficienti di variazione di DP(B) e DP(C) sono circa 10 volte quello di DP(A). Per tali ragioni, il DP(A) risulta la procedura che fornisce risultati meno dispersi e quindi più affidabile.

Tabella 4. Caso studio: risultati del test.

Procedura	e_F		e_M		α	
	μ [10 ⁻³]	CV [%]	μ [10 ⁻³]	CV [%]	μ [-]	CV [%]
DP(A)	0.89	2.3	2.08	0.6	0.381	5.8
DP(B)	1.37	26.3	1.93	4.8	0.274	64.8
DP(C)	1.28	32.7	1.97	6.0	0.264	53.7

Tabella 5. Caso studio: statistica sui valori estremali.

Procedura		e_F		e_M	
		μ [10 ⁻³]	CV [%]	μ [10 ⁻³]	CV [%]
DP(A)	e^{\min}	0.69	2.2	1.75	4.2
	e^{\max}	-	-	-	-
DP(B)	e^{\min}	0.79	19.7	1.77	6.4
	e^{\max}	2.90	38.3	2.39	9.4
DP(C)	e^{\min}	0.78	17.2	1.79	6.3
	e^{\max}	2.80	39.8	2.36	8.9

Tabella 6. Caso studio: statistica sul numero di valutazioni delle proprietà modali.

Metodo	Numero di valutazioni	
	μ [-]	CV [%]
DP(A)	135.9	8.5
DP(B)	413.0	52.2
DP(C)	142.1	71.6

Per approfondire le valutazioni, si è analizzata la variabilità dei valori estremali degli obiettivi nelle 100 ripetizioni dell'ottimizzazione. Le statistiche associate, riportate nella Tabella 5, consentono di affermare che la procedura DP(A) è più affidabile in quanto è possibile ottenere migliori stime dei valori minimi di e_F ed e_M . I valori più incerti di e_F^{\max} ed e_M^{\max} determinano una maggiore variabilità della soluzione per le procedure che usano tali parametri, ovvero il DP(B) e il DP(C). In Tabella 5, i valori non riportati non sono utilizzati durante la procedura di ottimizzazione.

L'ultimo aspetto su cui ci si intende soffermare riguarda l'onere computazionale richiesto. La Tabella 6 riporta la statistica relativa al numero di volte in cui si è dovuto risolvere il modello agli elementi finiti per valutare le proprietà modali (numero di valutazioni) a parità di costanti di convergenza, poste uguali per tutte le procedure. I risultati evidenziano come il DP(B) necessiti di un numero medio di valutazioni più alto comparato a quello di DP(A) e DP(C), che vedono un numero medio simile. La procedura DP(A) inoltre, vede una dispersione minore con un coefficiente di variazione più contenuto rispetto al DP(C).

5 LA ROCCA DI SAN FELICE SUL PANARO

Per potere verificare l'applicabilità delle metodologie all'identificazione del danno strutturale, è stato considerato un caso studio reale, la Rocca di San Felice sul Panaro (MO) (Figura 6). La struttura principale della Rocca risale al XIV secolo, ma, come avviene solitamente per gli edifici storici, essa è stata oggetto di diverse trasformazioni nei secoli. L'attuale configurazione della Rocca presenta una pianta a quadrilatero con un cortile interno e cinque torri. La Rocca è stata severamente danneggiata dalla sequenza sismica che ha colpito l'Emilia nel Maggio del 2012. Gli epicentri delle due scosse principali, avvenute il 20 ed il 29 Maggio con magnitudo di $M_L = 5.9$ e $M_L = 5.8$, si trovavano a pochi chilometri dalla Rocca. A seguito degli eventi sismici, le coperture delle quattro torri minori sono collassate e si sono formate fessure di diversa estensione sui muri

perimetrali della Rocca e in modo diffuso sul Mastio, la torre principale.

Poco dopo gli eventi sismici, il comune di San Felice sul Panaro ha deciso di realizzare alcuni interventi di somma urgenza in modo da prevenire ulteriori collassi. Le fessure diagonali del Mastio sono state riempite con malta e sono state inserite catene all'interno degli spessi muri perimetrali.

Sono stati effettuati di conseguenza test dinamici in condizioni ambientali per misurare la risposta del Mastio e per identificare le sue proprietà modali. Sono stati chiaramente identificati i primi 5 modi di vibrare, le cui frequenze proprie e deformate modali sono riportate in Tabella 7 e in Figura 7. I primi due modi flessionali presentano spostamenti nella direzione E-O (Figura 7(a)) e nella direzione N-S (Figura 7(b)), il terzo modo è torsionale (Figura 7(c)), il quarto (Figura 7(d)) ed il quinto modo (Figura 7(e)), infine, sono secondi modi flessionali. Si faccia riferimento a Bassoli et al. (2018) per la completa descrizione dei test dinamici e dell'identificazione modale.

5.1 Modello a elementi finiti della Rocca

Un modello accurato della Rocca di San Felice sul Panaro è stato sviluppato da Castellazzi et al. (2015, 2017) attraverso un'innovativa strategia di modellazione numerica chiamata CLOUD2FEM.



Figura 6. Rocca di San Felice sul Panaro.

Tabella 7. Rocca di San Felice: modi sperimentali.

Forma modale	Frequenza [Hz]
I flessionale E-O	1.72
I flessionale N-S	1.75
I torsionale	3.55
II flessionale N-S	4.83
II flessionale E-O	5.08

Tale strategia è basata sulla trasformazione semi-automatica di una nuvola di punti tridimensionale di una struttura in una mesh tridimensionale agli elementi finiti. La nuvola di punti tridimensionale della Rocca è stata ottenuta da un rilievo laser scanner realizzato dopo il terremoto del 2012, che ha permesso la ricostruzione di tutte le superfici interne ed esterne. Per tali ragioni, il modello agli elementi finiti rappresenta le condizioni post-sisma della struttura.

Lo studio presentato in Bassoli et al. (2018) ha mostrato che per descrivere pienamente il comportamento attuale del Mastio in condizioni d'esercizio, devono essere tenuti in conto gli effetti del serio quadro fessurativo. A questo fine, gli elementi della mesh prossimi alle zone fessurate e quindi corrispondenti alla muratura danneggiata sono stati selezionati ed è stato assegnato loro un modulo elastico differente (Figura 8). Ciò permette di considerare gli effetti del danno e delle fessure in condizioni d'esercizio, quando le azioni esterne non sono tali da implicare un comportamento non lineare, perciò il danno e le fessure comportano esclusivamente una riduzione della rigidità locale.

Note le caratteristiche modali del Mastio, per valutare la possibile progressione del danno ed il degrado della struttura nel tempo, si è deciso di calibrare il modello agli elementi finiti considerando come parametri strutturali da identificare il modulo elastico della muratura integra E_M e quello degli elementi prossimi alle fessure, ripristinati immediatamente dopo il sisma – nel seguito indicati come muratura danneggiata di modulo E_D .

5.2 Calibrazione del modello a elementi finiti

Il model updating della Rocca di San Felice sul Panaro viene eseguito con le procedure DP(A), DP(B) e DP(C) descritte in precedenza. I risultati sono messi a confronto in Tabella 8. Vengono riportati anche i risultati ottenuti applicando i criteri A, B, e C all'intera frontiera di Pareto.

La procedura DP(A) risulta essere la più coerente: la soluzione preferita in termini di obiettivi, peso e parametri meccanici è pressoché corrispondente a quella ottenuta con il criterio A da cui trova ispirazione. Al contrario, i risultati di DP(B) e DP(C) mostrano sensibili differenze rispetto a quelli dei criteri B e C applicati alla frontiera di Pareto. Si noti che la soluzione preferita ottenuta con i criteri A e C è associata non ad un singolo valore di α , bensì al range [0.62; 0.80], in quanto le ottimizzazioni realizzate variando il peso all'interno di quel range forniscono sempre ed esattamente lo stesso risultato.

Tabella 8. Rocca di San Felice sul Panaro: confronto tra le soluzioni preferite.

Procedura	e_F [10 ⁻²]	e_M [10 ⁻²]	E_M [MPa]	E_D [MPa]	α [-]
Criterio A	0.60	2.19	983	342	0.62-0.80
DP(A)	0.61	2.19	986	344	0.66
Criterio B	0.52	2.84	1040	198	0.92
DP(B)	2.61	2.00	773	513	0.01
Criterio C	0.60	2.19	983	342	0.62-0.80
DP(C)	1.78	2.00	804	567	.003

Tabella 9. Rocca di San Felice sul Panaro: confronto tra i valori estremali.

Procedura	e_F^{\min} [10 ⁻³]	e_M^{\min} [10 ⁻²]	e_F^{\max} [10 ⁻¹]	e_M^{\max} [10 ⁻¹]
Criterio A	2.26	1.99	-	-
DP(A)	2.51	2.01	-	-
Criterio B	2.26	1.99	1.18	4.67
DP(B)	8.28	1.97	4.64	0.28
Criterio C	2.26	1.99	1.18	4.67
DP(C)	7.57	1.97	4.58	0.21

Ciò è spiegato dal fatto che quel punto si trova in prossimità di una zona non convessa della frontiera di Pareto (vedi Figure 9-11), che non può essere ottenuta attraverso il metodo della somma ponderata (Kim e de Weck, 2005).

La Tabella 9 mostra i valori massimi e minimi di e_F ed e_M individuati dalle diverse procedure. I valori estremali ottenuti dalla la procedura DP(A) e il criterio A sono in buona corrispondenza, mentre si discostano maggiormente quelli delle procedure DP(B) e DP(C) rispetto ai criteri B e C, rispettivamente. Questo giustifica sia la buona corrispondenza precedentemente osservata tra i risultati della procedura DP(A) e il criterio A sia le sensibili differenze evidenziate tra le procedure DP(B) e DP(C) e i criteri B e C. Si noti, in particolare, la differenza di un ordine di grandezza tra i valori massimi dell'obiettivo e_M individuati da

DP(B) e DP(C) ed i corrispondenti valori individuati da B e C.

Le Figure 9-11 mostrano la frontiera di Pareto ottenuta utilizzando il metodo della somma pesata (equazione (6)) ed i punti nello spazio degli obiettivi corrispondenti ai vettori valutati nelle successive iterazioni dalle procedure DP(A), DP(B) e DP(C), rispettivamente. Il metodo DP(A) si è dimostrato il più efficiente nella ricerca degli ottimi di Pareto: tale procedura non individua solamente la soluzione ottimale, ma trova altri numerosi punti ottimi in zone differenti della frontiera di Pareto. In questo modo si riesce a caratterizzare anche la zona non convessa della frontiera, a differenza del metodo della somma ponderata. Nelle Figure 10 e 11 si può notare, invece, come DP(B) e DP(C) identifichino esclusivamente una parte estrema della frontiera, e di conseguenza, non caratterizzino la zona non convessa. I punti ottimali trovati, infatti, presentano tutti un valore di e_M piuttosto basso, e pressoché uguale, a fronte di un valore di e_F elevato, tanto che la soluzione preferita del metodo DP(B) non rientra nemmeno nel grafico di Figura 10 perché corrisponde a un valore di e_F pari a 2.61×10^{-2} .

Infine, il numero di analisi modali effettuate con il metodo DP(A) è 173, con i metodi DP(B) e DP(C) è di poco superiore a 250, mentre il numero medio di analisi modali realizzate per la determinazione di ogni punto della frontiera con il metodo della somma pesata è 157. Si conferma il minor onere computazionale richiesto dai metodi per la determinazione diretta della soluzione preferita, visto che con la procedura basata sui criteri da applicare alla frontiera di Pareto vi è la necessità di calcolare almeno un sottoinsieme rappresentativo della frontiera stesso.

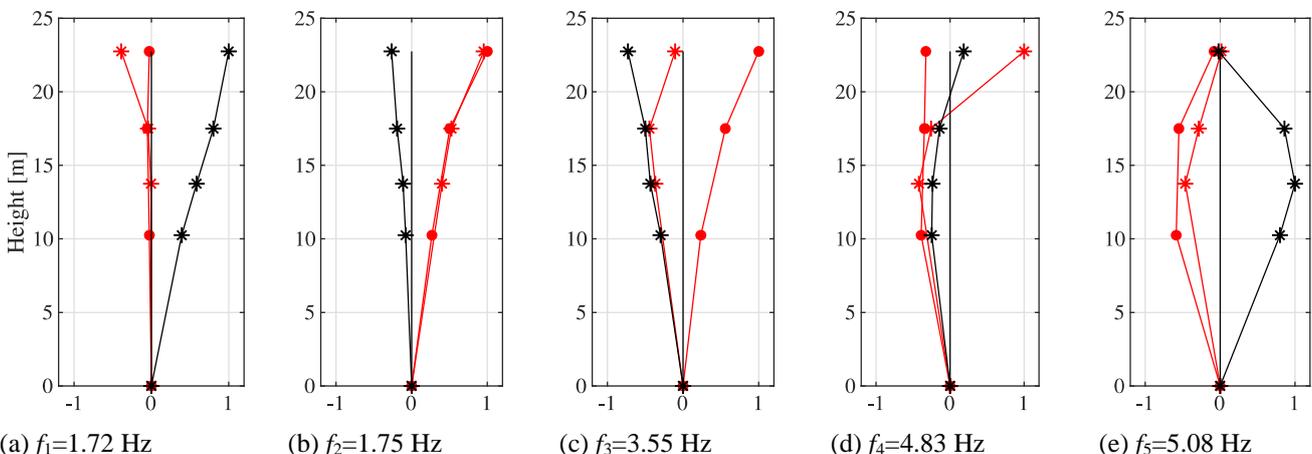
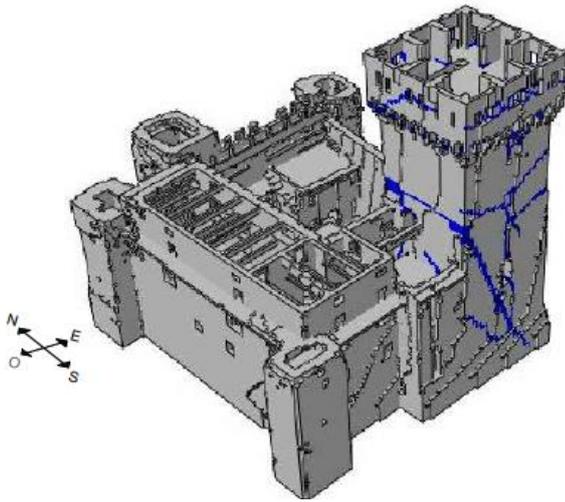
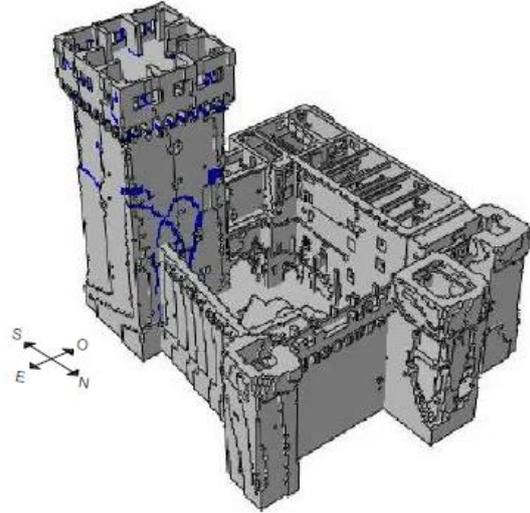


Figura 7. Forme modali dei modi (a, b, d, e) flessionali e del (c) modo torsionale. Asterischi neri: spostamenti modali dei punti di misura nell'angolo N-E della sezione trasversale in direzione E-O; asterischi rossi: spostamenti modali dell'angolo N-E in direzione N-S; punti rossi: spostamenti modali dell'angolo O-S in direzione N-S.



(a)



(b)

Figura 8. Modello a elementi finiti della Rocca di San Felice sul Panaro con elementi danneggiati (blu).

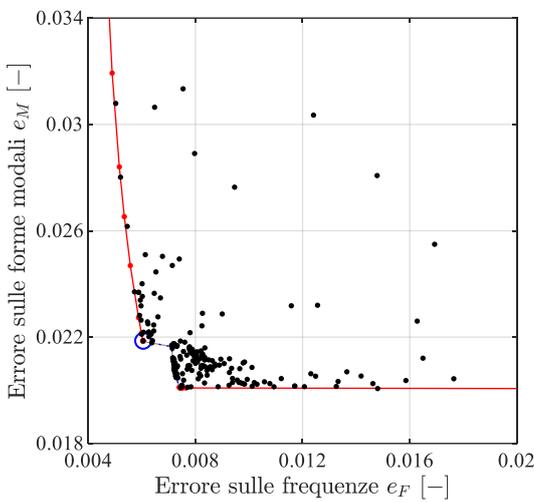


Figura 9. Confronto tra la frontiera (punti e linea rossi) ed i punti valutati dalla procedura DP(A) (punti neri). Circolo blu: soluzione preferita della procedura DP(A).

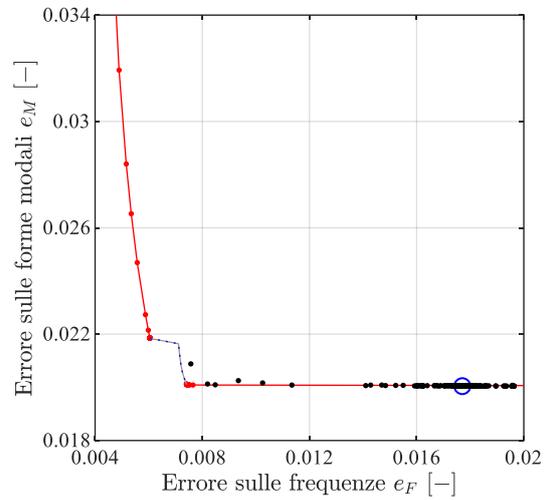


Figura 11. Confronto tra la frontiera (punti e linea rossi) ed i punti valutati dalla procedura DP(C) (punti neri). Circolo blu: soluzione preferita della procedura DP(C).

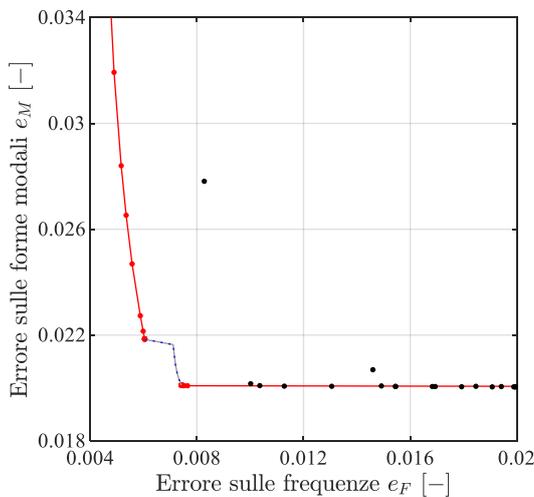


Figura 10. Confronto tra la frontiera (punti e linea rossi) ed i punti valutati dalla procedura DP(B) (punti neri).

6 CONCLUSIONI

In questo articolo è stato presentato il confronto fra tre procedure per la determinazione diretta della soluzione preferita nell'ottimizzazione multi-obiettivo applicata alla calibrazione di modelli agli elementi finiti. Ogni procedura si basa sulla soluzione del problema di ottimizzazione multi-obiettivo attraverso la minimizzazione di una funzione mono-obiettivo definita come combinazione dei singoli obiettivi. La funzione obiettivo di ogni procedura è stata definita facendo riferimento ad alcuni criteri proposti in letteratura per scegliere la migliore soluzione tra le costituenti la frontiera di Pareto: la minima distanza dal punto di equilibrio (procedura DP(A)), il *fuzzy satisfying approach* (procedura DP(B)) e la massima distanza dalla corda (procedura DP(C)).

L'ottimizzazione è stata condotta utilizzando un algoritmo evolutivo.

Il primo test, condotto considerando un semplice caso studio numerico, ha evidenziato come la procedura DP(A), a differenza di DP(B) e DP(C), sia praticamente insensibile alla variabilità dell'algoritmo di ottimizzazione e sia, in media, meno onerosa dal punto di vista computazionale.

Le procedure proposte sono state quindi applicate alla calibrazione del modello agli elementi finiti della Rocca di San Felice sul Panaro, una struttura storica in muratura che è stata seriamente danneggiata dal sisma che colpì l'Emilia nel 2012. Il model updating è stato eseguito con le procedure DP(A), DP(B) e DP(C) e con il metodo classico che prevede la determinazione dell'intera frontiera e la successiva applicazione dei criteri di scelta. DP(A) è risultata la più coerente tra le procedure di determinazione diretta della soluzione preferita in quanto è l'unica che ha ottenuto risultati consistenti con l'applicazione del criterio di scelta corrispondente (minima distanza dal punto di equilibrio) all'intera frontiera, tra i quali la stima del peso α che permette di quantificare l'importanza relativa degli obiettivi. Infine, comparato al metodo classico della somma ponderata, il metodo DP(A) si è rivelato efficiente nella caratterizzazione della zona non convessa della frontiera di Pareto e significativamente meno oneroso dal punto di vista computazionale.

BIBLIOGRAFIA

- Allemang, R., Brown, D., 1982. A correlation coefficient for modal vector analysis. *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference*. Orlando, Florida, USA, 110-116.
- Bassoli, E., Vincenzi, L., D'Altri, A.M., de Miranda, S., Forghieri, M., Castellazzi, G., 2018. Ambient vibration-based finite element model updating of an earthquake-damaged masonry tower. *Structural Control and Health Monitoring*, **25**(5), 1-15.
- Castellazzi, G., D'Altri, A.M., Bitelli, G., Selvaggi, I., Lambertini, A., 2015. From laser scanning to finite element analysis of complex buildings by using a semi-automatic procedure. *Sensors*, **15**(8), 18360-18380.
- Castellazzi, G., D'Altri, A.M., de Miranda, F., Ubertini, F., 2017. An innovative numerical modelling strategy for the structural analysis of historical monumental buildings. *Engineering Structures*, **132**, 229-248.
- Christodoulou, K., Ntotsios, E., Papadimitriou, C., Panetsos, P., 2008. Structural model updating and prediction variability using Pareto optimal models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198** (1), 138-149.
- Deb, K., Gupta, S., 2010. Understanding knee point in bicriteria problems and their implications as preferred solution principles. *Tech. rep.*, Indian Institute of Technology Kanpur.
- Dincer, I., Rosen M.A., Ahmadi, P., 2017. *Optimization of Energy Systems*, Wiley.
- Kim, I.Y., de Weck, O.L., 2005. Adaptive weighted-sum method for bi-objective optimization: Pareto front generation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **29**(2), 149-158.
- Konak, A., Coit, D.W., Smith, A.E., 2006. Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial. *Reliability Engineering and System Safety*, **91**(9), 992-1007.
- Majidi, M., Nojavan, S., Esfetanaj, N.N., Najafi-Ghalelou, A., Zare, K., 2017. A multi-objective model for optimal operation of a battery/PV/fuel cell/grid hybrid energy system using weighted sum technique and fuzzy satisfying approach considering responsible load management. *Solar Energy*, **144**, 79-89.
- Pareto, V., 1906. *Manuale di Economia Politca*, Società Editrice Libreria.
- Vincenzi, L., Gambarelli, P., 2017. A proper infill sampling strategy for improving the speed performance of a Surrogate-Assisted Evolutionary. *Computers and Structures*, **178**, 58-70.
- Savoia, M., Ferracuti, B., Vincenzi, L., 2009. Inverse analysis for the calibration of FRP – Concrete interface law. *Advances in Structural Engineering*, **12**(5), 613-625.